

PRINCIPE VAN VOLLEDIGE INDUCTIE (P.15 E.V.)

Algemeen

Stelling (principe van volledige inductie)

Neem aan dat $P(n)$ een bewering is die afhangt van een natuurlijk getal n . Zij n_0 een natuurlijk getal en veronderstel dat het volgende geldt:

- (a) De bewering $P(n_0)$ is waar.
- (b) Indien de bewering $P(k)$ waar is voor een zeker natuurlijk getal $k \geq n_0$, dan is de bewering $P(k + 1)$ eveneens waar.

Dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$.

Bewijzen gebaseerd op het principe van volledige inductie hebben steeds dezelfde structuur. De basis van zo'n bewijs wordt hieronder weergegeven. Alle zwarte tekst van onderstaande kader moet ook in jouw bewijs terugkomen. De tekst in het **blauw** moet aangepast worden afhankelijk van je bewijs. In het **rood** worden aandachtspunten en belangrijke aspecten vermeld.

Lees onderstaande kader nauwkeurig. Probeer puntje (a) en (b) van de stelling terug te vinden in onderstaande structuur.

Opgave: Bewijs met het principe van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq n_0$ geldt: $P(n)$.

Bewijs:

Basisstap: We bewijzen de uitspraak voor $n = n_0$.

Je neemt voor n_0 de kleinste waarde waarvoor je de bewering wil aantonen. Dit mag je niet zomaar kiezen! Je neemt dus een concrete waarde voor n_0 .

$LL = \dots\dots$ Vul n_0 in in het linkerlid van de bewering $P(n)$

$RL = \dots\dots$ Vul n_0 in in het rechterlid van de bewering $P(n)$

Merk op dat $LL = RL$ zodat de basisstap is aangetoond voor $n = n_0$.

Deze zin moet er staan!

Inductiestap:

- *Inductiehypothese (IH):* Veronderstel dat voor een willekeurige $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq n_0$ geldt dat $P(k)$ waar is.

Schrijf de uitdrukking $P(k)$ uit in symbolen.

- *Te bewijzen:* We willen de uitspraak aantonen voor $k + 1$, namelijk aantonen dat $P(k + 1)$ waar is.
Schrijf de uitdrukking $P(k + 1)$ uit in symbolen.
- *Bewijs:* We starten van het LL (of RL):

$$\begin{aligned} LL &= \dots\dots \\ &= \dots\dots \\ &= RL \end{aligned}$$

Je start steeds van het LL of RL en je gaat respectievelijk op zoek naar het RL of LL . Dit doe je door gebruik te maken van de inductiehypothese en eventueel nog een paar extra bewerkingen uit te voeren. Duid steeds aan waar je precies de inductiehypothese (IH) gebruikt.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt de bewering $P(n)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$, vanwege het principe van volledige inductie.
Deze zin mag je steeds zo overnemen.

Voorbeeld

We illustreren bovenstaand schema aan de hand van een voorbeeld. Lees dit voorbeeld aandachtig.

Opgave: Bewijs met het principe van volledige inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$ geldt:

$$P(n) : \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bewijs:

Basisstap: We bewijzen de uitspraak voor $n = 1$.

$$\begin{aligned} LL &= \sum_{i=1}^1 i = 1 \\ RL &= \frac{1(1+1)}{2} = 1 \end{aligned}$$

Merk op dat $LL = RL (= 1)$ zodat de basisstap is aangetoond voor $n = 1$.

Inductiestap:

- *Inductiehypothese (IH):* Veronderstel dat voor een willekeurige $k \in \mathbb{N}$ met $k \geq 1$ geldt dat $P(k)$ waar is. We veronderstellen dus dat

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

- *Te bewijzen:* We willen de uitspraak aantonen voor $k + 1$, namelijk aantonen dat $P(k + 1)$ waar is.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

- *Bewijs:* We starten van het LL :

$$\begin{aligned} LL &= \sum_{i=1}^{k+1} i \\ &= k + 1 + \sum_{i=1}^k i \\ &\stackrel{(\text{IH})}{=} k + 1 + \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{2(k+1) + k(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = RL \end{aligned}$$

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt de bewering $P(n)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$, vanwege het principe van volledige inductie.

Let op:

- Definieer steeds de bewering $P(n)$.
- Zorg ervoor dat het duidelijk is welke waarde je voor n_0 neemt in de basisstap.
- Vergeet bij de inductiehypothese het woordje “willekeurig” niet.
- Zorg dat je bij het bewijs steeds aangeeft waar je de inductiehypothese gebruikt. Dit zal je **ALTIJD** moeten gebruiken om je bewijs te kunnen voltooien.
- Vergeet de conclusie niet.