

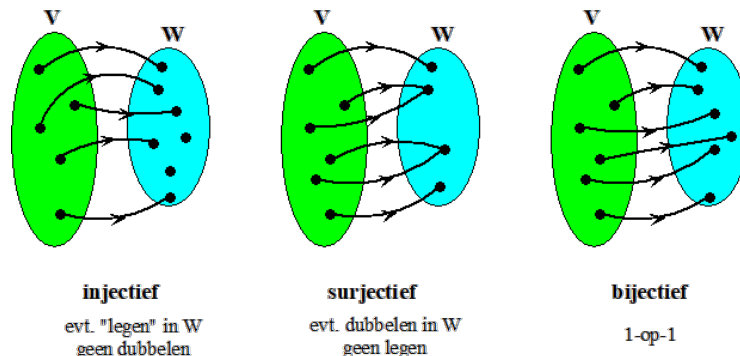
HOOFDSTUK 1: INLEIDENDE BEGRIPPEN

1.13 INJECTIES EN SURJECTIES

Injectief: Een functie $f: A \rightarrow B$ heet injectief indien elk element van B hoogstens één keer voorkomt als tweede component van een koppel in f .

Surjectief: Een functie $f: A \rightarrow B$ is surjectief indien $\text{Im } f = B$. (elk element van het codomein heeft minstens één origineel)

Bijjectief: functie is zowel injectief als surjectief. (bijjectie van een verzameling naar zichzelf heet een permutatie.)



1.15 INVERSE FUNCTIES

Invers: Zij $f: A \rightarrow B$ een functie. Indien een functie $g: B \rightarrow A$ voldoet aan: $f \circ g = 1_B$ en $g \circ f = 1_A$ dan heet g een invers voor f . We zeggen dan ook dat f inverteerbaar is.

HOOFDSTUK 2: EENVOUDIGE PRINCIPES VAN DISCRETE WISKUNDE

2.2 EENVOUDIGE TELTECHNIEKEN

Ordering: Een verzameling A heeft $n \in \mathbb{N}$ elementen indien er een bijjectie bestaat van $[n]$ naar A . Deze bepaalt een ordening of nummering van A .

HOOFDSTUK 3: GEHELE GETALLEN

3.2 WELORDE

Infinum: Zij $S \subset \mathbb{Z}$. $x \in \mathbb{Z}$ heet een ondergrens van S indien $\forall s \in S: x \leq s$. het infimum van S is de grootste ondergrens van S .

Minimum: Indien het infimum van een verzameling S zelf tot S behoort, dan noemen we het een minimum.

Definitie: We zeggen dat een geheel getal b een veelvoud is van $a \in \mathbb{Z}$ indien $\exists k \in \mathbb{Z}: b = ka$. We zeggen in dat geval ook dat a het getal b deelt en schrijven $a \mid b$. Ook zeggen we dat a een factor of een deler is van b of dat b deelbaar is door a . Als $a \neq 0$, noteren we het getal $k \in \mathbb{Z}$ waarvoor $b = ka$ met b/a . Natuurlijk bestaat b/a voor elke keuze $b \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ maar in het algemeen behoort b/a tot $\mathbb{Q}$ en niet tot $\mathbb{Z}$. Enkel als $a \mid b$ hebben we $b/a \in \mathbb{Z}$.

3.5 GROOTSTE GEMENE DELER

Grootste gemene deler: stel $a, b \in \mathbb{Z}$. Een geheel getal d heet een grootste gemene deler (ggd) van a en b indien $d \mid a$ en $d \mid b$ (gemene deler) en $\forall c \in \mathbb{Z}: c \mid a \wedge c \mid b \Rightarrow c \mid d$ (grootste).

Definitie: De grootste gemene deler van a en b is de unieke positieve grootste gemene deler van a en b . We noteren hem $\text{ggd}(a, b)$.

Relatief priem: $a, b \in \mathbb{Z}$ heten relatief priem indien $\text{ggd}(a, b) = 1$.

4.7 BIPARTIETE GRAFFEN

Bipartiet: Een multigraf heet bipartiet indien zijn toppenverzameling kan gepartitioneerd worden in twee delen zodat er geen enkele pijl is die toppen verbindt in hetzelfde deel.

4.8 KOPPELINGEN

Koppeling: Een koppeling (Engels: “matching”) in een ongerichte (multi) graf G is een verzameling van bogen van G waarin geen twee een top gemeenschappelijk hebben.

Maximaal: Een koppeling heet maximaal indien we ze niet kunnen uitbreiden tot een koppeling met meer bogen. Een **maximumkoppeling** in een graf G is een koppeling van maximale grootte. Dit wil zeggen dat er in G geen koppeling met meer bogen bestaat.

k-wisselpad: Zij (V, E) een graf met een koppeling K . Een K -wisselpad is een pad waarvan de opeenvolgende bogen afwisselend wel en niet tot K behoren. Een vergrotend K -wisselpad is een K -wisselpad waarvan de eerste en laatste top K -onverzadigd zijn.

4.9 TOEWIJZINGEN EN HET LESSENROOSTERPROBLEEM

Compleet bipartiete graf:

Definitie 40. Zij $G = (V_1 \cup V_2, E)$ een bipartiete ongerichte graf. Indien elke top van V_1 adjacent is met elke top van V_2 , spreekt men van een **compleet bipartiete graf**. Als $|V_1| = m$ en $|V_2| = n$ noteren we zulke graf $K_{m,n}$.

Toewijzing: Stel $G = (V_1 \cup V_2, E)$ bipartiet ongericht en $W \subset V_1$. Een toewijzing (Engels: “assignment”) van W in V_2 is een koppeling K tussen toppen van W en V_2 die alle toppen van W verzadigt. Als W' de deelverzameling is van V_2 die door K verzadigd wordt, is K ook een toewijzing van W' in V_1 .

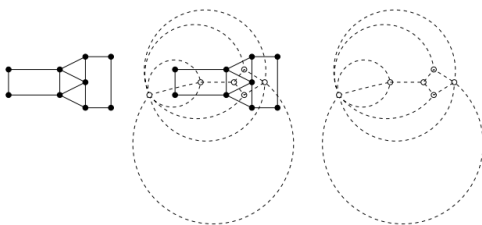
Toppenoverdekking: Een (toppen)overdekking (Engels: “vertex cover”) van een ongerichte graf G is een deelverzameling U van toppen van G waarbij elke boog van G minstens één top van U bevat. Een minimale overdekking is een overdekking die geen echte deelverzameling heeft welke ook een overdekking is. Een minimumoverdekking is een overdekking waarnaast geen overdekking bestaat met minder toppen.

4.10 PLANAIRE GRAFFEN

Planair: Een multigraf heet planair indien hij in een vlak kan getekend worden zonder dat twee bogen elkaar snijden. Als we een planaire multigraf in het vlak tekenen zodanig dat geen twee bogen snijden, wordt het vlak verdeeld in gebieden (Engels: “faces”).

Booqequivalent: Een graf H die ontstaat uit een graf G door (eventueel meermaals) toepassen van bovenstaande operaties heet booqequivalent met G . (zie wpo)

Duale graf: Zij G een planaire ongerichte multigraf. De duale graf G^* heeft als toppen de gebieden van G en twee toppen zijn adjacent als en slechts als de overeenkomstige gebieden een boog delen. De figuur hieronder toont een voorbeeld van een graf en zijn duale (in streepjeslijn).



HOOFDSTUK 5: GENERERENDE FUNCTIES

5.1 VOORBEELDEN EN DEFINITIE

Genererende functie: Zij $a_0, a_1, a_2, \dots$ een rij van reële getallen. De genererende functie voor die rij is per definitie

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

(niet convergent perse)

5.2 VERALGEMEENDE BINOMINAALCOËFFICIËNTEN

We weten dat voor $n, r \in \mathbb{N}_0$ geldt

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)}{r!}$$

Definitie 47. We stellen nu per definitie voor alle niet-nulle natuurlijke getallen n en r

$$\binom{-n}{r} := \frac{(-n)(-n-1)(-n-2) \cdots (-n-r+1)}{r!}.$$

Dan geldt

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} &= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2) \cdots (n+r-1)}{r!} \\ &= (-1)^r \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} \\ &= (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \end{aligned}$$

We stellen ook $\forall n \in \mathbb{Z}: \binom{n}{0} := 1$.

Uit de analyse weet je dat de McLaurin-reeks voor $(1+x)^{-n}$ gelijk is aan

$$1 + (-n)x + \frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2 + \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

zodat

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r.$$

Dit is een veralgemening van het binomium van Newton. Nog anders gezegd: $(1+x)^{-n}$ is een genererende functie voor $\binom{-n}{0}, \binom{-n}{1}, \binom{-n}{2}, \dots$

We passen dit nieuw begrip toe.

5.3 PARTITIES VAN NATUURLIJKE GETALLEN

Partitie: Een partitie van een niet-nul natuurlijk getal n is een schrijfwijze van n als som van niet-nulle natuurlijke getallen

HOOFDSTUK 6

6.1 HOMOGENE EERSTE ORDE LINEAIRE RECURRENTIEVERGELIJKINGEN

$$a_n = ra_{n-1}$$

Eerste orde betekent dat a_n enkel afhangt van a_{n-1} en niet van de voorgaande termen in de rij;

lineair wil zeggen dat enkel de eerste macht van a_{n-1} voorkomt, niet a_{n-1}^5 of zo;

homogeen betekent dat a_n naast a_{n-1} niet afhangt van iets anders. Dus niet $a_n = ra_{n-1} + \sin n$ of zo.

Check cursus

