

Definitie 14. Gegeven een verzameling V , definiëren we een **partitie** van V als een verzameling $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van V die voldoen aan volgende twee voorwaarden:

(P1) $\forall A \neq B \in \mathcal{A}: A \cap B = \emptyset$

(P2) $\bigcup \mathcal{A} = V$

Stelling 22. Ook omgekeerd geeft elke partitie van een verzameling X aanleiding tot een equivalentierelatie.

Bewijs. Zij $\mathcal{A}$ een partitie van X . Definieer, voor $x, y \in X$:

$$x \mathcal{R} y \iff \exists A \in \mathcal{A} : x, y \in A.$$

Ga zelf als oefening na dat dit een equivalentierelatie is. □

3.9 CONGRUENTIES

Eigenschap: $\equiv_m$ is een equivalentierelatie.

Bewijs: $\equiv_m$ is

- reflexief: $x \equiv_m x$ want $x - x = 0$ is een veelvoud van m ;
- symmetrisch: $x \equiv_m y \Rightarrow y - x = km \Rightarrow x - y = (-k)m \Rightarrow y \equiv_m x$;
- transitief: $x \equiv_m y$ en $y \equiv_m z \Rightarrow y - x = km$ en $z - y = lm \Rightarrow z - x = (z - y) + (y - x) = (k + l)m$.

□

(definitie equivalentierelatie is belangrijk)

Stelling 23. $\equiv_m$ is 'compatibel' met '+' en '·' in $\mathbb{Z}$, i.e.: $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ met $x_1 \equiv_m x_2$ en $y_1 \equiv_m y_2$:

$$x_1 + y_1 \equiv_m x_2 + y_2$$

en

$$x_1 y_1 \equiv_m x_2 y_2.$$

Bewijs. Stel $x_2 - x_1 = km$ en $y_2 - y_1 = lm$. Dan geldt

$$(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = km + lm = (k + l)m$$

en

$$\begin{aligned} x_2 y_2 - x_1 y_1 &= x_2 y_2 - x_1 y_2 + x_1 y_2 - x_1 y_1 \\ &= (x_2 - x_1) y_2 + (y_2 - y_1) x_1 \\ &= km y_2 + lm x_1 \\ &= (k y_2 + l x_1) m \end{aligned}$$

□

Toepassing (de 9-proef): Als een getal in basis 10 geschreven wordt als $x_n x_{n-1} \dots x_0$ dan hebben we

$$x \equiv x_0 + x_1 + \dots + x_n \pmod{9}.$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} x - (x_0 + x_1 + \dots + x_n) &= x_0 + x_1 \times 10 + \dots + x_n \times 10^n \\ &\quad - x_0 - x_1 - \dots - x_n \\ &= 9x_1 + 99x_2 + 999x_3 + \dots + (10^n - 1)x_n. \end{aligned}$$

Maar er geldt duidelijk dat $9 \mid 10^i - 1 = \underbrace{99 \dots 99}_{i \text{ keer}}$. Als we dan $\rho(x)$ schrijven voor $x_0 + x_1 + \dots + x_n$, dan hebben we aangetoond:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \equiv \rho(x) \pmod{9}.$$

□

Stelling 27. Zij $y \in \mathcal{U}_m$. Dan geldt: $y^{\varphi(m)} = 1$ in $\mathbb{Z}_m$.

Bewijs. Nummer de elementen van $\mathcal{U}_m$. Dus $\mathcal{U}_m = \{u_1, u_2, \dots, u_{\varphi(m)}\}$. Stel $u := u_1 u_2 \cdots u_{\varphi(m)}$. Dan is u een element van $\mathcal{U}_m$, want het is een product van elementen van $\mathcal{U}_m$.

Vermits $y\mathcal{U}_m = \mathcal{U}_m$ zijn de elementen $yu_1, yu_2, \dots, yu_{\varphi(m)}$ niets anders dan $u_1, u_2, \dots, u_{\varphi(m)}$, eventueel in een andere volgorde geschreven. Bijgevolg geldt ook:

$$yu_1 \times yu_2 \times \cdots \times yu_{\varphi(m)} = u$$

of nog

$$y^{\varphi(m)} u_1 u_2 \cdots u_{\varphi(m)} = u$$

of

$$\begin{aligned} y^{\varphi(m)} u &= u \\ \iff y^{\varphi(m)} u u^{-1} &= u u^{-1} \\ \iff y^{\varphi(m)} &= 1. \end{aligned}$$

□

Stelling 28. Voor p priem hebben we

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^p \equiv_p n.$$

Bewijs. Als $p \nmid n$ is n inverteerbaar modulo p zodat $n^{\varphi(p)} \equiv_p 1$, of nog $n^{p-1} \equiv_p 1$, zodat $n^p \equiv_p n$.

Als $p \mid n$ is het duidelijk dat $n^p \equiv_p 0 \equiv_p n$. □

Stelling 40 (Kirchhoff). *Zij $\mathcal{G}$ een gerichte multigraf zonder lussen en zij B de incidentiematrix van $\mathcal{G}$. Stel B_0 gelijk aan de matrix die ontstaat na verwijdering van om het even welke rij van B . Het aantal opspannende bomen in $\mathcal{G}$ is dan gelijk aan $\det B_0 B_0^\top$.*

Bewijs. Door henummering van de n toppen kan je er steeds voor zorgen dat de weggelaten rij de laatste is. Als $m < n-1$ kan $\mathcal{G}$ zeker niet samenhangend zijn en zijn er dus geen opspannende bomen. Neem C een willekeurige $(n-1 \times n-1)$ -deelmatrix van B_0 . We bewijzen nu dat $|\det C| = 1$ als en slechts als de deelgraf $\mathcal{G}_C$ bepaald door de kolommen van C (dit zijn juist $n-1$ pijlen van $\mathcal{G}$) een opspannende boom is. Anders is $\det C = 0$. We doen dit per inductie op n .

De basisstap van de inductie is voor $n = 2$. Voor zulke kleine grafen is de stelling duidelijk waar.

Onderstel in een eerste geval dat er in $\mathcal{G}_C$ een top v_i is van graad (= in- + uitgraad) 1. Dit betekent dat de i -de rij van C juist één niet-nul element bevat (en dat element is ± 1). We kunnen $\det C$ ontwikkelen volgens de i -de rij. Nu kunnen we de inductiehypothese gebruiken, want de cofactor die we moeten uitrekenen is de determinant van de matrix die overeenkomt met de graf $\mathcal{G}_C$ waar we v_i uit hebben weggelaten. We noteren deze graf $\mathcal{G}_C - v_i$. Dit is duidelijk een opspannende boom van $\mathcal{G} - v_i$ als en slechts als $\mathcal{G}_C$ een opspannende boom was van $\mathcal{G}$.

Als er nu geen top is van graad 1 in $\mathcal{G}_C$ (behalve misschien v_n , de top die we weglieten in B_0), dan kan $\mathcal{G}_C$ geen boom zijn en nog minder een opspannende boom. Maar $\mathcal{G}_C$ heeft wel $n-1$ pijlen en $n-1$ toppen. Dus moet $\mathcal{G}_C$ een top van graad nul hebben. Als dit niet v_n , de top van de weggelaten rij, is, dan heeft C een nulle rij zodat $\det C = 0$. Als v_n de

geïsoleerde top is, bevat elke kolom van C een $+1$ en een -1 . Bijgevolg is de som van alle rijen van C de nulrij zodat de rijen van C lineair afhankelijk zijn en $\det C = 0$.

Nu gebruiken we de formule van Cauchy-Binet (zie Appendix A) die zegt dat

$$\det B_0 B_0^\top = \sum_{C \text{ een } (n-1 \times n-1)\text{-deelmatrix van } B_0} (\det C)^2.$$

Maar we weten dat $(\det C)^2 = 1$ of 0 , naargelang de kolommen van C een opspannende boom bepalen of niet. $\square$

Stelling 53. *Zij $\mathcal{G}$ een samenhangende planaire ongerichte simpele graf met minstens twee bogen. Dan geldt $3f \leq 2e$ en $e \leq 3v - 6$.*

Bewijs. De stelling is duidelijk waar wanneer er maar één gebied is. Onderstel $f > 1$. Vermits de graf simpel is, bestaat de rand van elk gebied uit minstens 3 bogen. Elke boog kan hoogstens twee keer optreden als rand van een gebied zodat

$$2e \geq 3f$$

Samen met $v - e + f = 2$ krijgen we $2 \leq v - e + \frac{2}{3}e = v - \frac{e}{3}$. □

Gevolg 14. Elke samenhangende planaire ongerichte simpele graf G heeft een top van graad 6

Bewijs. We weten $e \leq 3v - 6$. Dus moet

$$\sum_{x \in V(\mathcal{G})} \deg(x) = 2e \leq 6v - 12.$$

Mocht elke top x graad ≥ 6 hebben, zou $\sum_{x \in V(\mathcal{G})} \deg(x) \geq 6v$, tegenspraak. □

Stelling 54 (Kuratowski, 1930). *Een multigraf is planair **als en slechts als** hij geen deelgraf bevat die boogequivalent is met $K_{3,3}$ of met K_5 .*

Stelling 55. *Elke samenhangende planaire ongerichte simpele graf $\mathcal{G}$ kan met 6 kleuren gekleurd worden.*

Bewijs. We doen dit bij inductie op v , het aantal toppen van de planaire graf $\mathcal{G}$.

Voor $v = 1$ is het duidelijk in orde.

Onderstel nu dat de stelling geldt voor alle planaire grafen met $v - 1$ toppen. Uit Gevolg 14 weten we dat $\mathcal{G}$ een top t heeft met $\deg(t) \leq 5$. Als we t weglaten, krijgen we een graf $\mathcal{G}'$ met $v - 1$ toppen. Deze kan dus gekleurd worden met 6 kleuren. Vermits t hoogstens 5 buren heeft (die in $\mathcal{G}'$ elk een kleur krijgen), is er zeker een kleur over voor t . □

We kunnen dit resultaat nog een beetje verfijnen.
