

Schriftelijk Examen Discrete Wiskunde

Eerste zittijd academiejaar 2025-2026

Ann Doods

THEORIE & PRAKTIJK

Je hebt 3u de tijd.

Schakelstudenten computerwetenschappen/toegepaste informatica mogen vraag 3 OF vraag 4 van het deel THEORIE schrappen (duid dit aan op het opgaveblad).

THEORIE

Vraag 1 (4 ptn)

- a) Geef de definitie van de binomiaalcoëfficiënt. Leg uit wat deze coëfficiënt voorstelt en waarom. (2 ptn)
- b) Bewijs de identiteit van Pascal (2 ptn)

Vraag 2 (6 ptn)

- a) Wat is een congruentierelatie in $\mathbb{Z}$? Bewijs dat dit een equivalentierelatie is. (3 ptn)
- b) Bewijs dat deze equivalentierelatie aanleiding geeft tot een partitie van $\mathbb{Z}$. (3 ptn)

Vraag 3 (5 ptn)

- a) Geef de definitie van een Eulergraf. (1 ptn)
- b) Geef de stelling van Euler die deze grafen karakteriseert en bewijs. (4 ptn)

Vraag 4 (5 ptn)

- a) Wat is een planaire graf? (1 ptn)
- b) Euler heeft een stelling dat dit aantoon. Formuleer deze stelling en bewijs ze. (4 ptn)

PRAKTIJK

VRAAG 1

Stel we hebben een esports team met 13 leden. We moeten een trainingsschema opstellen zodat er in de ochtend 5 mensen, 's middags 4 mensen en 's avonds 5 mensen trainen.

1. Hoeveel verschillende combinaties zijn er mogelijk voor dit schema?
2. Twee van de leden hebben een medische aandoening waardoor er een dokter aanwezig moet zijn. Ze mogen echter niet tegelijk spelen, want dit is teveel werk voor de dokter. Hoeveel combinaties zijn er dan mogelijk voor het schema?
3. Het team wil een wachtwoord maken met de letters uit het woord **GEHEIM**. Hoeveel wachtwoorden van 7 letters kunnen we maken?
4. Hoeveel wachtwoorden van 7 letters kunnen we maken als elke letter (G, E, H, I, M) minstens 1 keer gebruikt wordt?

VRAAG 2

Bewijs door inductie dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$:

$$2(1 + 2 + 3 + \dots + n)^4 = (1^5 + 2^5 + \dots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \dots + n^7)$$

Tip: bewijs eerst dat $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

VRAAG 3

Het jaar waarin Septimius Severus trouwde met Julia Domna is versleuteld met RSA. De publieke sleutelgegevens zijn $n = 201$ en $e = 23$. Het onderschepte bericht is $c = 187$.

Ontcijfer het bericht en vind het jaartal.

VRAAG 4

Los de volgende recurrentievergelijking op:

$$a_{n+1} - a_n - 20a_{n-1} = -20n^2 + 42n - 19$$

met beginvoorwaarden $a_1 = 10$ en $a_2 = 13$.

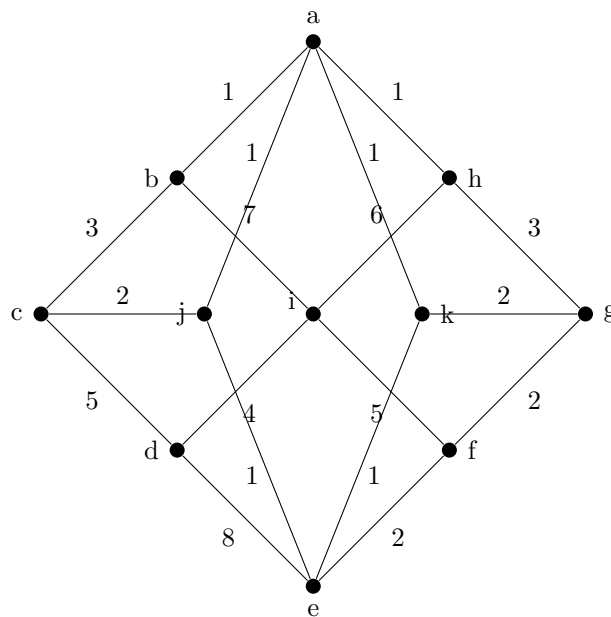
VRAAG 5 (Gelijkaardig, niet exact zoals examen)

Zijn volgende uitspraken waar of vals? Verklaar telkens waarom met een berekening of stelling, of geef een tegenvoorbeeld.

- a) Een Eulergraf met 17 toppen heeft altijd minstens 2 toppen met dezelfde graad.
- b) Een samenhangende planaire graf met 12 toppen en 30 bogen verdeelt het vlak in precies 20 gebieden.
- c) Een bos dat bestaat uit 50 toppen en 3 samenhangende componenten heeft precies 47 bogen.

VRAAG 6

Beschouw de onderstaande gewogen graf.



- a) Vind hierin een opspannende boom van minimaal gewicht en bepaal ook dit gewicht.
- b) Is deze graf een Hamiltongraaf? Verklaar.
- c) Is deze graf planair? Verklaar.
- d) Is deze graf bipartiet? Verklaar.