

Schriftelijk Examen

Discrete Wiskunde

Eerste zittijd academiejaar 2024–2025

Ann Dooms

27–28/01/2025 (reconstructie)

THEORIE

Je hebt 3u de tijd.

Schakelstudenten computerwetenschappen/toegepaste informatica mogen vraag 3 OF vraag 4 schrappen (duid dit aan op het opgaveblad).

Dag 1, Schakelstudenten:

Vraag 1

Formuleer en bewijs het principe van de duiventil.

(3 ptn)

Vraag 2

Zij $m \in \mathbb{N}_0$:

- a) Geef de definitie van "congruent modulo m ". (1 ptn)
- b) Bewijs dat dit een equivalentierelatie is. (2 ptn)
- c) Bewijs dat deze equivalentierelatie aanleiding geeft tot een partitie van $\mathbb{Z}$. (2 ptn)
- d) Welke bewerkingen kunnen we definiëren op deze partitie en waarom? (2 ptn)

Vraag 3

- a) Geef de definitie van een toernooi. (0,5 ptn)
- b) Geef de definitie van een gericht Hamiltonpad. (0,5 ptn)
- c) Bewijs dat elk toernooi een gericht Hamiltonpad heeft. (4 ptn)

Vraag 4

- a) Geef de definitie van een opspannende boom. (1 ptn)
- b) Formuleer en bewijs het Gierigheidsalgoritme van Kruskal volledig. (4 ptn)

Dag 2, Computerwetenschappen:

Vraag 1

Formuleer en bewijs het principe van de duiventil. (3 ptn)

Vraag 2

Zij $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$:

- a) Bewijs dat er een unieke $q, r \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $m = nq + r$ met $0 \leq r < n$. (4 ptn)
- b) Toon formeel aan dat er in de eerste 33 elementen van de rij 1, 11, 111, ... minstens één veelvoud van 33 zit.

Vraag 3

- a) Geef de definitie van een Eulergraaf. (1 ptn)
- b) Bewijs de Stelling van Euler die deze grafen karakteriseert. (4 ptn)

Vraag 4

- a) Geef de definitie van een opspannende boom. (1 ptn)
- b) Formuleer en bewijs het Gierigheidsalgoritme van Kruskal volledig. (4 ptn)

OEFENINGEN

Je hebt 3u de tijd.

Gebruik een nieuw blad voor elke vraag.

Schrijf op elk blad je naam en studentnummer

Vraag 1 (4 ptn)

Bij onderhandelingen over een nieuwe federale regering zijn vijf politieke partijen betrokken, en voor elk van deze vijf partijen zijn telkens drie mensen afgevaardigd. In een poging om de traag vorderende besprekingen wat sneller vooruit te laten gaan, splitsen de betrokkenen zich op in twee groepen: één groep van vijf die zich over het grotere budgettaire plaatje wil buigen en een andere groep van tien, die zich zal bezighouden met concretere beleidsplannen.

- a) Op hoeveel manieren kunnen de vijftien onderhandelaars zich zo opsplitsen in twee groepen, als er geen enkele beperking is? (Zo kan het gerust zijn dat van één partij elk van de drie onderhandelaars aanschuift bij de groep van vijf, en van een andere partij niemand.)
- b) Hoeveel manieren zijn er nog als we verwachten dat er minstens één iemand uit de partij van de formateur en ook minstens één iemand van de Franstalige liberalen (een andere partij dan die van de formateur) bij de groep van vijf is?
- c) Als we verwachten dat er voor elk van de vijf partijen een afgevaardigde is in de groep van vijf, en als de relatie tussen twee van de onderhandelaars — we noemen ze voor het gemak Conner en George-Louis — zo slecht is dat zij niet tot eenzelfde groep willen behoren, hoeveel manieren zijn er dan nog? (We gaan er hier van uit dat Conner en George-Louis tot verschillende partijen behoren.)

Als na acht maanden onderhandelen de formateur bij de koning een zoveelste verlenging van zijn mandaat vraagt, houdt deze laatste zijn antwoord in beraad. Hij wil eerst polsen hoeveel animo er bij de verschillende partijen nog is om verder te gaan met de onderhandelingen. De koning vraagt daarom dat elk van de vijf partijen aan hem laat weten hoeveel van de drie onderhandelaars nog verder wil met de formatie.

- d) Hoeveel verschillende antwoorden zijn mogelijk als we weten dat er in totaal negen van de vijftien onderhandelaars verder wil? (Een antwoord bestaat hier uit een vijftal getallen tussen 0 en 3 — één getal voor elk van de vijf partijen.)

Vraag 2 (3 ptn)

Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat:

$$\sum_{i=2n}^{3n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(38n+1)$$

Vraag 3 (4 ptn)

De antwoorden bij een quiz worden versleuteld verstuurd met behulp van het RSA-algoritme.

De publieke sleutel heeft als waarden $n = 95$ en $e = 47$.

Je onderschept het geëncrypteerde antwoord $c = 83$ op de vraag:

In welk jaar van de negentiende eeuw ontwikkelde Emile Berliner de grammofoonplaat?

Ontcijfer dit antwoord!

Vraag 4 (3 ptn)

De rij getallen $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 74$, $a_4 = 14$, ... voldoet aan de recurrentierelatie:

$$a_{n+2} = 128a_n^2 - 6a_{n+1} - 9a_n$$

Vind een formule die de n -de term a_n uitdrukt in functie van n . (M.a.w. los de recurrentievergelijking op.)

Vraag 5 (3 ptn)

Zijn volgende uitspraken waar of vals? Verklaar telkens waarom, of geef een tegenvoorbeeld.

(Met "graf" bedoelen we hier steeds een simpele ongerichte graf, en geen multigraf.)

- a) Een maximumkoppeling in een samenhangende graf met 9 toppen bestaat steeds uit juist 4 bogen.
- b) Het aantal toppen in een bipartiete Eulergraf zonder geïsoleerde toppen is steeds even.
- c) Een graf met n toppen en $n+2$ bogen, waarvan één top graad 5 heeft, kan nooit een Hamiltongraf zijn.

Vraag 6 (3 ptn)

Beschouw de hieronder weergegeven (gewogen) graf.

- a) Vind hierin een opspannende boom van minimaal gewicht en bepaal ook dit gewicht.
- b) Bevat deze graf een Eulerpad? Verklaar.
- c) Is deze graf planair? Verklaar.

