

Discrete wiskunde examen januari 2024-2025

- Theorie
 - 3u
 - Exacte verwoording zoals op het examen
 - Schakels master computerwetenschappen/toegepaste informatica mogen vraag 3 **OF** vraag 4 overslaan.
- Oefeningen
 - 3u
 - Vragen zijn ongeveer verwoord zoals op het examen.

Theorie (dag 1, schakelstudenten)

1. Formuleer en bewijs het principe van de duiventil. (3 ptn.)
2. Zij $m \in \mathbb{N}_0$
 - (a) Geef de definitie van "congruent modulo m ". (1 ptn.)
 - (b) Bewijs dat dit een equivalentierelatie is. (2 ptn.)
 - (c) Bewijs dat deze equivalentierelatie aanleiding geeft tot een partitie van $\mathbb{Z}$. (2 ptn.)
 - (d) Welke bewerkingen kunnen we definiëren op deze partitie en waarom? (2 ptn.)
3.
 - (a) Geef de definitie van een toernooi. (0,5 ptn.)
 - (b) Geef de definitie van een gericht Hamiltonpad. (0,5 ptn.)
 - (c) Bewijs dat elk toernooi een gericht Hamiltonpad heeft. (4 ptn.)
4.
 - (a) Geef de definitie van een opspannende boom. (1 ptn.)
 - (b) Formuleer en bewijs het Gierigheidsalgoritme van Kruskal volledig. (4 ptn.)

Theorie (dag 2, computerwetenschappen)

1. Formuleer en bewijs het principe van de duiventil. (3 ptn.)
2. Zij $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}_0$
 - (a) Bewijs dat er een unieke q en $r \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $m = nq + r$ met $0 \leq r < n$. (4 ptn.)
 - (b) Toon formeel aan dat er in de eerste 33 elementen van de rij $1, 11, 111, \dots$ er minstens één veelvoud van 33 zit.
3.
 - (a) Geef de definitie van een Eulergraaf (1 ptn.)
 - (b) Bewijs de Stelling van Euler die deze grafen karakteriseert. (4 ptn.)
4.
 - (a) Geef de definitie van een opspannende boom. (1 ptn.)
 - (b) Formuleer en bewijs het Gierigheidsalgoritme van Kruskal volledig. (4 ptn.)

Oefeningen

1. Antwoorden met sommen, verschillen, producten en quotiënten van getallen volstaat telkens als antwoord. De resultaten hoeven dus niet per se volledig te worden uitgerekend. Binomiaalcoëfficiënten, echter, mogen niet blijven staan. (4 ptn.)
Er zijn 5 partijen die elks 3 onderhandelaars afleveren. Er zijn 2 groepen, de kleine groep met 5 onderhandelaars, en de grote groep met 10.
 - (a) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om de onderhandelaars te verdelen over de twee groepen?
 - (b) De partij van de formateur wilt minstens 1 persoon in de kleine groep, de partij van de Franstalige liberalen wilt ook minstens 1 persoon in de kleine groep. Hoeveel verschillende mogelijkheden blijven nog over?
 - (c) Conner en Georges-Louis kunnen niet met elkaar samenwerken, en willen dus niet in dezelfde groep zitten. Ze behoren beide tot een andere partij. Hoeveel mogelijkheden zijn er nog over?
 - (d) Na 8 maanden onderhandelen hebben de partijen nog steeds geen akkoord bereikt. De koning vraagt elk van de vijf partijen hoeveel van de onderhandelaars nog willen verder onderhandelen. Elke vertegenwoordiger kan stemmen of ze de vergaderingen nog willen verderzetten. 9 van de 15 onderhandelaars zijn akkoord om nog verder te vergaderen.
Elke partij geeft een getal van 0 tot 3 dat aangeeft hoeveel van de onderhandelaars van die partij nog willen verder onderhandelen. Een voorbeeld van een antwoord zijn: *partij 1: 2, partij 2: 0, partij 3: 1, partij 4: 3, partij 5: 3*. Hoeveel verschillende antwoorden zijn er mogelijk?
2. Bewijs voor $n \in \mathbb{N}$ (3 ptn.)

$$\sum_{i=2n}^{3n} i^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(38k+1)$$

3. Een met behulp van RSA geëncrypteerde boodschap luidt $c = 83$. De publieke sleutel heeft als waarden $n = 95$ en $e = 47$. Ontcijfer dit bericht. (4 ptn.)
4. De rij getallen $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 74, a_4 = 14 \dots$ voldoet aan de recurentierelatie (3 ptn.)

$$a_{n+2} = 128n^2 - 6a_{n+1} - 9a_n$$

Vind een formule die de n -de term a_n uit deze rij uitdrukt in functie van n . (M.a.w. los de recurentievergelijking op.)

5. Waar of vals. Indien waar, motiveer. Indien vals, geef een tegenvoorbeeld. (3 ptn.)
 - (a) Een maximumkoppeling in een graaf met 9 toppen heeft altijd 4 bogen
 - (b) Een bipartiete Eulergraaf zonder geïsoleerde toppen, heeft steeds een even aantal toppen
 - (c) Een graaf met n toppen, $n+2$ bogen, en een top van graad 5, kan nooit Hamilton zijn.

6. Gegeven onderstaande graaf (3 ptn.)

- (a) Vind een opspannende boom van minimaal gewicht, en bepaal ook dit gewicht.
- (b) Heeft de graaf een Eulerpad? Verklaar.
- (c) Is de graaf een planair? Verklaar.

