

Discrete Wiskunde

Tussentijds examen

N.B. Bij opgaven 2 en 5 volstaat een uitdrukking met sommen, verschillen, producten en quotiënten van getallen telkens als antwoord. De resultaten hoeven dus niet per se volledig te worden uitgerekend. Binomiaalcoëfficiënten, echter, mogen niet blijven staan.

1. Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\sum_{i=1}^{n+1} (i^3 - i^2 + i) = \frac{(n+1)(n+2)(3n^2 + 5n + 6)}{12}.$$

2. Hoeveel tien-cijferige codes kunnen worden gemaakt waarin elk cijfer precies één keer voorkomt, maar waarin geen enkel van de volgende patronen voorkomt:

- (a) 123 (bv. 1203987654 mag wel, maar 9876501234 mag niet);
- (b) 123 en 98765 (bv. 3210567489 mag wel, maar de twee eerder gegeven voorbeelden mogen niet);
- (c) 123, 98765 en 48 (bv. 8412765930 mag wel, maar alle eerder gegeven voorbeelden mogen niet).

3. Is de functie

$$f : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}}$$

injectief? Surjectief? Bijjectief? Toon aan. Indien bijjectief, bepaal de inverse functie. Indien niet, definieer een bijjectie $\tilde{f}$ met hetzelfde voorschrift als f (door domein en/of codomein zo min mogelijk te beperken) en bepaal $\tilde{f}^{-1}$.

4. Zij $f : A \rightarrow B$ een functie en $T \subset B$. Vul aan met $\subset$ of $\supset$ en bewijs:

$$f(A \setminus f^{-1}(T)) \dots B \setminus T.$$

Toon aan de hand van een tegenvoorbeeld dat de twee bovenstaande verzamelingen in het algemeen niet gelijk zijn.

5. Om een geslaagd tentamen te vieren, nodigt een student vier medestudenten uit voor een restaurantbezoek. Om een vlotte bediening te garanderen, vraagt het restaurant aan haar gasten om vooraf een lijstje door te geven waarop bij elk van de aangeboden gerechten het aantal personen staat aangegeven dat er voor kiest.

De keuzemogelijkheden volgen verderop.

- (a) Als we ervan uitgaan dat elk van de vier studenten zowel een voorgerecht, een hoofdgerecht als een dessert neemt, hoeveel dergelijke lijstjes zijn dan mogelijk?

Na het etentje wordt aan elk van de vier aanwezige personeelsleden van het restaurant gevraagd welk van de onderstaande negen gerechten hem of haar het meest weet te smaken. Ervan uitgaand dat elk van hen juist één gerecht als favoriet kiest, hoeveel mogelijkheden zijn er als

- (b) geen enkel van de gerechten meerdere keren wordt genoemd als favoriet?
(c) één van de gerechten juist twee keer wordt genoemd en de andere hoogstens één keer?
(d) twee van de gerechten juist twee keer worden genoemd en de andere bijgevolg geen enkele keer?

(Merk op dat bij (b), (c) en (d), in tegenstelling tot bij (a), van belang is wie wat kiest.)

Er kan gekozen worden uit de volgende voorgerechten:

- Franse uiensoep met zuurdesembrood
- Carpaccio van inktvis

Voor het hoofdgerecht is er keuze tussen:

- Mosselen met venkel en absinth
- Flammekueche: pizza uit de Elzas
- Volkorenpasta met pancetta en roodlof
- Gebakken tempeh met seizoensgroentjes

Voor het dessert is er keuze uit:

- Gekarameliseerde ananasschijfjes
- Trio van ijs
- Verloren brood