

Discrete wiskunde examen augustus 2023-2024

- Theorie
 - 3u
 - Exacte verwoording zoals op het examen
 - Schakels master computerwetenschappen/toegepaste informatica mogen vraag 3 **OF** vraag 4 overslaan.
- Oefeningen
 - 3u
 - Vragen zijn ongeveer verwoord zoals op het examen.

Theorie

1. Formuleer en bewijs het principe van de duiventil. (3 ptn.)
2. (a) Zij $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat er een unieke q en $r \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $m = nq + r$ met $0 \leq r < n$. (4 ptn.)
(b) Definieer de ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$. Welke elemente zijn inverteerbaar en waarom? (3 ptn.)
3. (a) Geef de definitie van een Eulergraaf (0,5 ptn.)
(b) Bewijs de Stelling van Euler die deze grafen karakteriseert. (4,5 ptn.)
4. (a) Geef de definitie van een boom. (0,5 ptn.)
(b) Hoeveel bogen heeft een boom? Waarom? (4,5 ptn.)

Oefeningen

1. Antwoorden met sommen, verschillen, producten en quotiënten van getallen volstaat telkens als antwoord. De resultaten hoeven dus niet per se volledig te worden uitgerekend. Binomiaalcoëfficiënten, echter, mogen niet blijven staan.

Een doos bevat 20 witte, en 10 rode ballen. De witte ballen zijn genummerd van 1 tot 20, de rode van 1 tot 20. (4 ptn.)

- (a) Hoeveel verschillende 6tallen kan je trekken?
- (b) Hoeveel daarvan bevatten exact 3 rode en 3 witte ballen?
- (c) Hoeveel van bovenstaande bevatten de witte bal met nummer 13, en rode bal met nummer 8?
- (d) Hoeveel verschillende 6tallen bevatten minstens 2 rode ballen?

2. Bewijs voor $n \in \mathbb{N}_0$ (3 ptn.)

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{\binom{i}{2}} = \frac{1}{n}$$

3. Een met behulp van RSA geëncrypteerde boodschap luidt $c = 67$. De publieke sleutel heeft als waarden $n = 77$ en $e = 17$. Ontcijfer dit bericht. (4 ptn.)

4. Recurrentievergelijking. $a_1 = -12, a_2 = 39, \dots$ (3 ptn.)

$$a_{n+2} = 12n^2 + 14n + 9 - 5a_{n+1} - 6a_n$$

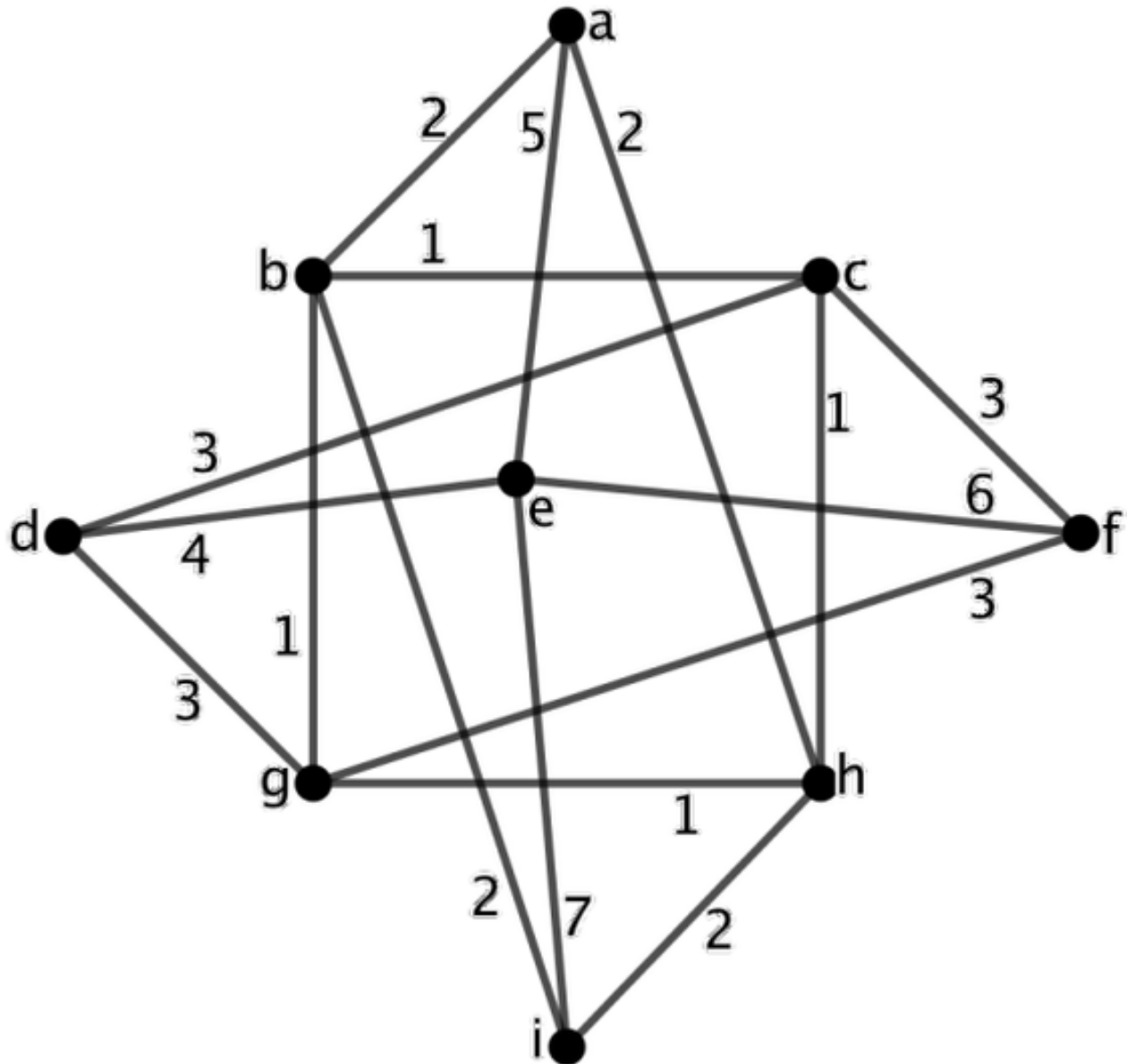
5. Gegeven uitleg over samenhangsbogen en samenhangstoppen.

Waar of vals. Indien waar, motiveer. Indien vals, geef een tegenvoorbeeld. (3 ptn.)

- (a) Een Hamiltongraaf heeft nooit een samenhangsboog.
- (b) Een graaf met een samenhangsboog heeft altijd een samenhangstop.
- (c) Elke boog in een boom is een samenhangsboog.

6. Gegeven onderstaande graaf¹ (3 ptn.)

- Vind een opspannende boom van minimaal gewicht, en bepaal ook dit gewicht.
- Is de graaf een planair? Verklaar.
- Geef 2 eigenschappen van de cursus (niet planair) waaraan de graaf wel of niet aan voldoet. Leg uit waarom.



¹De graaf op het examen leek op deze, maar had 5 toppen ($a-e$) aan de buitenkant en een vijfhoek ($f-j$) vanbinnen. De middelste top was k . De gewichten ook verschillend.