

Discrete wiskunde examen januari 2023-2024

- Theorie
 - 3u
 - Exacte verwoording zoals op het examen
 - Schakels master computerwetenschappen/toegepaste informatica mogen vraag 3 **OF** vraag 4 overslaan.
- Oefeningen
 - 3u
 - Vragen zijn grotendeels exact verwoord zoals op het examen.

Theorie

1. Formuleer en bewijs het principe van de duiventil. (3 ptn.)
2. (a) Zij $m \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat er een unieke q en $r \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $m = nq + r$ met $0 \leq r < n$. (4 ptn.)
(b) Definieer de ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$. Welke elemente zijn inverteerbaar en waarom? (3 ptn.)
3. (a) Geef de definitie van een Eulergraaf (0,5 ptn.)
(b) Bewijs de Stelling van Euler die deze grafen karakteriseert. (4,5 ptn.)
4. (a) Geef de definitie van een boom. (0,5 ptn.)
(b) Hoeveel bogen heeft een boom? Waarom? (4,5 ptn.)

Oefeningen

1. Antwoorden met sommen, verschillen, producten en quotiënten van getallen volstaat telkens als antwoord. De resultaten hoeven dus niet per se volledig te worden uitgerekend. Binomiaalcoëfficiënten, echter, mogen niet blijven staan. (4 ptn.)
 - (a) Hoeveel keer dienen we 5 identieke dobbelstenen te gooien voor we zeker zijn van (minstens) 2 identieke worpen.
 - (b) Bij een kaartspel (standaard 4 x 13 kaarten) worden 3 kaarten uitgedeeld. Hoeveel manieren zijn er om daarbij een “paar” gedeeld te krijgen (d.w.z. 2 van dezelfde rang, en 1 van een andere rang).
 - (c) Hoeveel getallen $n \in \mathbb{N}$ met $n \leq 1000$ en zijn deelbaar door 2, 3 of 5?
 - (d) Aan een sollicitatiegesprek nemen 15 sollicitanten deel. 5 juryleden beoordelen daarbij de sollicitaties “geslaagd” of “niet geslaagd”. Een getal k is het kleinste natuurlijke getal met de eigenschap: elk tweetal juryleden heeft hoogstens k sollicitanten eenzelfde beoordeling gegeven. Toon aan dat $k \geq 6$. (Hint: gebruik het principe van de dubbeltelling.)
2. Bewijs voor $n \in \mathbb{N}$ (3 ptn.)

$$\sum_{i=n}^{2n} i^3 = \frac{3}{4}n^2(n+1)(5n+1)$$

3. Een met behulp van RSA geëncrypteerde boodschap luidt $c = 132$. De publieke sleutel heeft als waarden $n = 143$ en $e = 47$. Ontcijfer dit bericht. (4 ptn.)
4. Recurrentievergelijking. $a_1 = 7, a_2 = 7, a_3 = 31, a_4 = 29, \dots$ (3 ptn.)

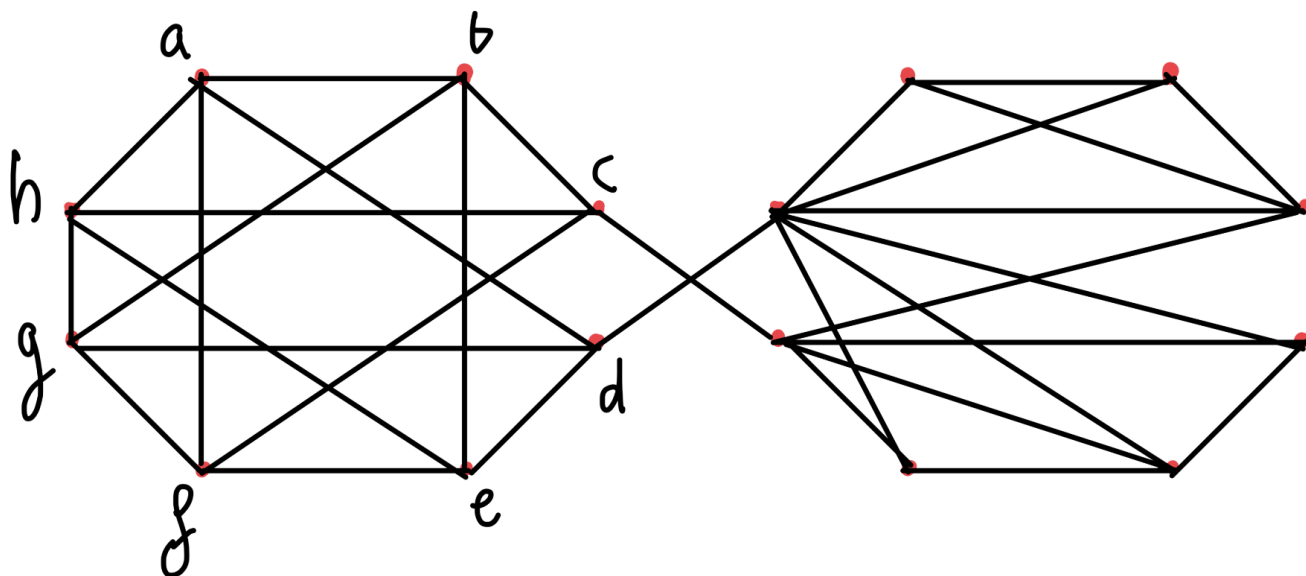
$$a_{n+2} = 4a_n - 3n^2 + 7n - 1$$

5. Waar of vals. Indien waar, motiveer. Indien vals, geef een tegenvoorbeeld. (3 ptn.)
 - (a) Het aantal genummerde¹ bipartiete Hamiltongrafen met 2023 toppen is minstens 2024.
 - (b) Elke maximale koppeling in een samenhangende graf met 6 toppen bestaat uit juist 3 bogen.
 - (c) Een graf met evenveel toppen als bogen bevat steeds een cyclus.

¹Gegeven extra uitleg i.v.m. “genummerd”

6. Gegeven onderstaande graaf² (3 ptn.)

- Vind een opspannende boom van minimaal gewicht, en bepaal ook dit gewicht.
- Is de graaf een Eulergraaf? Verklaar.
- Is de graf een Hamiltongraaf? Indien ja, geef een Hamiltoncyclus. Indien nee, geef een gepaste eigenschap waarmee je dit aantoonst.
- Is de deelgraaf gevormd door de toppen a tot h planair?³



²Op het examen had de graaf gewichten en waren alle toppen benoemd.

³Verwoording is anders dan op het examen.