

Discrete Wiskunde

Tussentijds Examen

N.B. Bij opgaven 2 en 5 volstaat een uitdrukking met sommen, verschillen, producten en quotiënten van getallen telkens als antwoord. De resultaten hoeven dus niet per se volledig te worden uitgerekend. Binomiaalcoëfficiënten, echter, mogen niet blijven staan.

1. (4 ptn) Bewijs dat voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt dat

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + (2n-1)2n(2n+1) = n(n+1)(2n^2 + 2n - 1).$$

2. (3 ptn) In hoeveel permutaties van de letters van het alfabet komt geen enkel van de volgende patronen voor?

- (a) ev;
- (b) ev, alu;
- (c) ev, alu, atie, moment.

3. (4 ptn) Is de functie

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{2x^3 + 3}{x^3 - 1}}$$

injectief? Surjectief? Bijjectief? Toon aan. Indien bijjectief, bepaal de inverse functie. Indien niet, definieer een bijjectie $\tilde{f}$ met hetzelfde voorschrift als f (door domein en/of codomein zo min mogelijk te beperken) en bepaal $\tilde{f}^{-1}$.

4. (4 ptn) Zij $f : A \rightarrow B$ een functie en $S \subset A$. Vul aan met $\subset$ of $\supset$ en bewijs:

$$f^{-1}(B \setminus f(S)) \dots A \setminus S$$

Toon aan de hand van een tegenvoorbeeld aan dat deze twee verzamelingen in het algemeen niet gelijk zijn.

5. (5 ptn) Voor dit vak worden, zoals je weet, behalve het examen ook twee tentamens georganiseerd. Stel dat in februari een tabel wordt opgesteld waarin voor elk van de drie testen apart het aantal studenten wordt ingevuld dat geslaagd, niet geslaagd, dan wel afwezig was. Als we ervan uitgaan dat er juist 120 studenten zijn ingeschreven voor dit vak, dan zou die tabel er bv. als volgt kunnen uitzien:

- **Tentamen 1:**

- Geslaagd: 70
- Niet geslaagd: 40
- Afwezig: 10

- **Tentamen 2:**

- Geslaagd: 72
- Niet geslaagd: 36
- Afwezig: 12

- **Examen:**

- Geslaagd: 65
- Niet geslaagd: 35
- Afwezig: 20

- (a) Hoeveel zo'n tabellen kunnen in totaal bekomen worden?

Uit de resultaten van de drie bovengenoemde tests wordt voor elke student een gewogen gemiddelde gemaakt dat na afronding een natuurlijk getal oplevert kleiner of gelijk aan 20, het eindresultaat voor dit vak. Na afloop wordt aan vier van de studenten — we noemen ze hier voor het gemak eventjes Amber, Bilal, Charlotte en Daan — gevraagd naar de door hen behaalde eindresultaten.

Hoeveel verschillende antwoorden zijn mogelijk...

- (b) in totaal? (Eén antwoord zou bv. kunnen zijn Amber: 12, Bilal: 14, Charlotte: 20, Daan: 0. Een ander antwoord is Amber: 0, Bilal: 20, Charlotte: 14, Daan: 12.)
- (c) als we al weten dat twee van de vier hetzelfde resultaat hebben behaald en de andere twee eveneens eenzelfde resultaat dat verschilt van dat van het eerste tweetal? (bv. Amber: 13, Bilal: 14, Charlotte: 14, Daan: 13)
- (d) als we al weten dat juist twee van de vier hetzelfde resultaat hebben behaald en de andere twee elk een ander resultaat, verschillend van het resultaat van het eerste tweetal? (bv. Amber: 13, Bilal: 14, Charlotte: 8, Daan: 14)

(N.B. We gaan er hier van uit dat elk van hen aan alle drie de tests heeft deelgenomen. 'Afwezig' als resultaat komt bij hen dus niet voor. Merk ook op dat er 21 natuurlijke getallen zijn tussen 0 en 20.)