



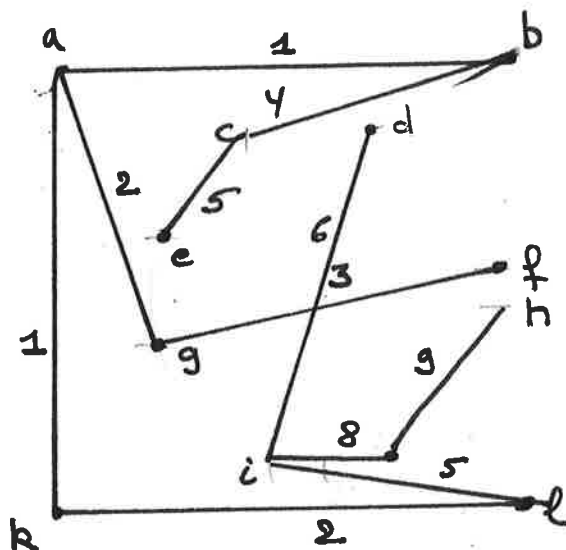
Tentamen Taak Dieter Platel december 2021

Discrete wiskunde (Vrije Universiteit Brussel)



Scan to open on Studocu

1a. opspannende boom van minimaal gewicht
via gierigheidsalgoritme.



gewicht

1
1
2
2
3
4
5
5
6
8
9

$$\text{gewicht} = \frac{46}{1}$$

1b) is de tekening een Eulergraf

d.w.z. er is een Eulercyclus

↳ d.w.z. alle bogen zijn verbonden

via een gesloten pad

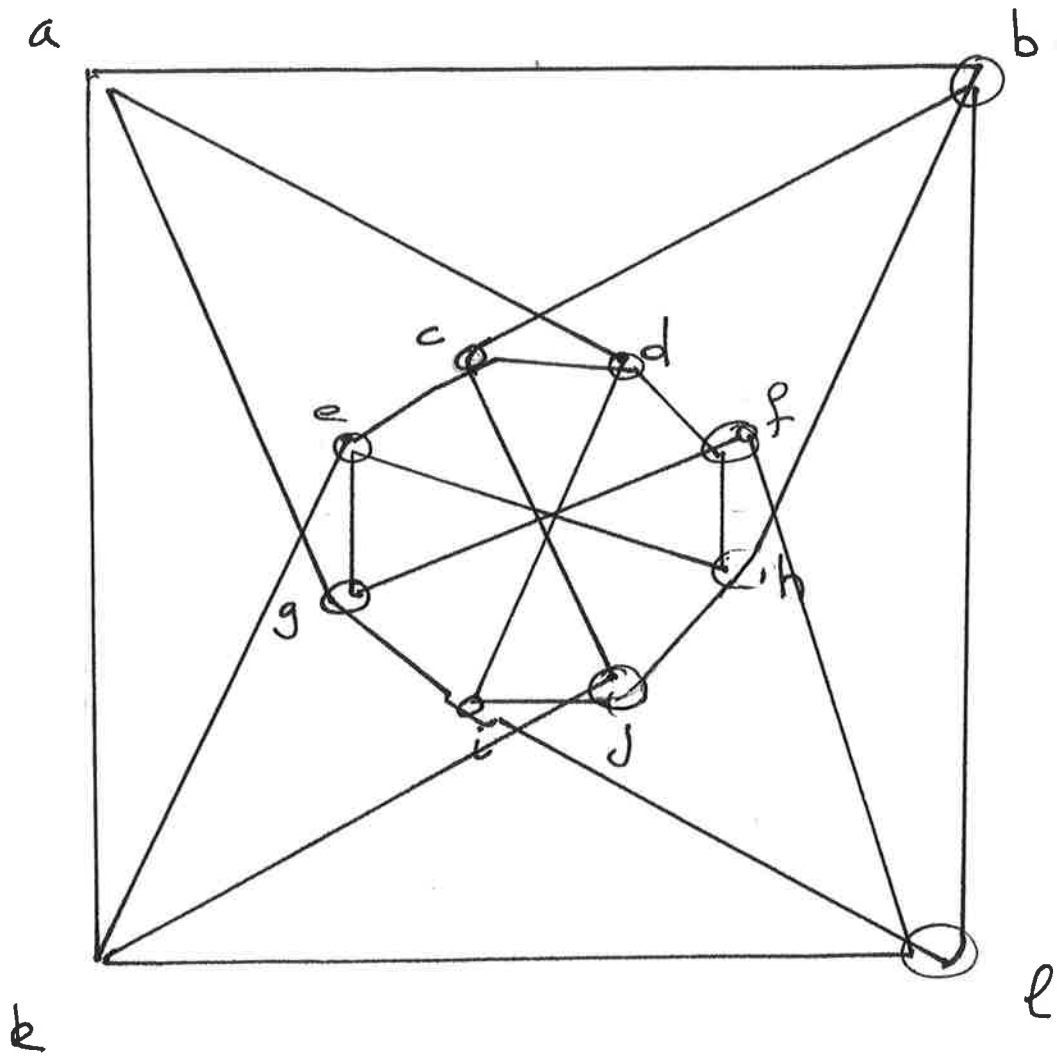
of: er bestaat een gesloten pad

dat alle bogen bevat:

ja, want de graf is samenhangend

en de graden van alle toppen zijn even

↳ dan is er zeker een Eulercyclus



$a-b-h-j-i-d-a-g-i-l-b-e-j-k$
 $-l-f-g-e-h-f-d-i-e-k \rightarrow a$

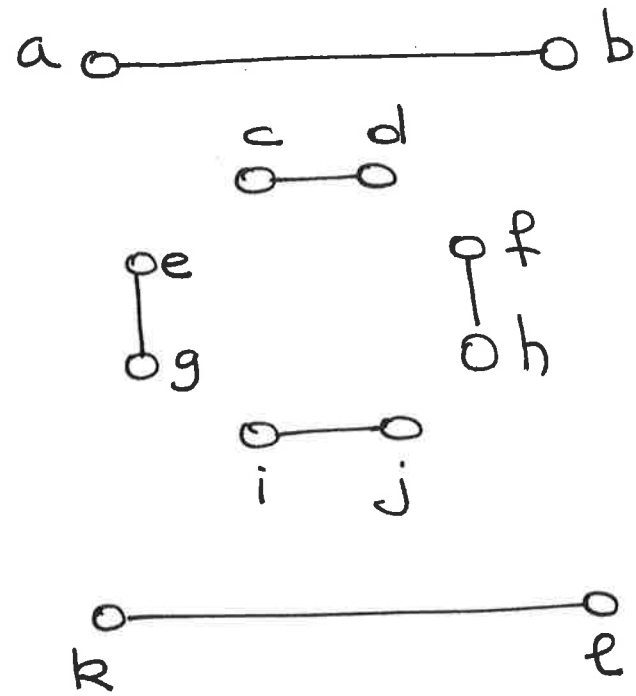
2x: 12. toppen gehandelt.
 24/ bogen.

1c maximumkoppeling

maximaal: een koppeling waar geen bogen
meer bij kunnen

maximum: koppeling van maximale grootte

onbeteutellig: gewicht speelt hier geen rol.



← maximum
maximaal
volledig

max bogen is $6 = \frac{12}{2}$

toppen

1d een maximale koppeling die geen maximum koppeling is

↑
er kunnen geen
bogen meer bij

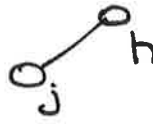
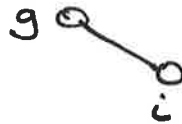
↑
niet het grootste mogelijk
aantal bogen.



oe

of

← tussen f en e bestaat
geen boog
er kunnen geen bogen
meer bij
↳ maximaal



max # bogen

het aantal bogen is $5 < 6$
niet maximum

Oef 2: via Chinese Reststelling

(5)

$$\begin{cases} (1) & n \equiv 1 \pmod{3} \\ (2) & n \equiv 3 \pmod{4} \\ (3) & n \equiv 1 \pmod{5} \\ (4) & n \equiv 0 \pmod{11} \end{cases} \rightarrow \text{op te lossen stelsel.}$$

$$m = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 = 660$$

$$\begin{cases} M_1 = \frac{660}{3} = 220 \\ M_2 = \frac{660}{4} = 165 \\ M_3 = \frac{660}{5} = 132 \\ M_4 = \frac{660}{11} = 60 \end{cases}$$

inverse zoeken

$$\begin{cases} M_1 y_1 \equiv 1 \\ M_2 y_2 \equiv 4 \\ M_3 y_3 \equiv 1 \\ M_4 y_4 \equiv 0 \end{cases}$$

$$220 \cdot (2) = \overbrace{3 \cdot (73)}^{219} + 1$$

$$y_1 = 2$$

$$165 \cdot (1) = \overbrace{4 \cdot (41)}^{164} + 1$$

$$\overbrace{132 \cdot (3)}^{396} = \overbrace{5 \cdot (79)}^{395} + 1$$

$$60 \cdot 11 = 60 \cdot 11$$

$$y_4 = 11$$

n is dan

$$a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3 + a_4 M_4 y_4$$

$$1 \cdot 220 \cdot 1 + 3 \cdot 165 \cdot 1 + 1 \cdot 132 \cdot 3 + 0 \cdot 60 \cdot 11$$

$$n = 1111$$

Verificatie oef 2

$$4) 1111 = 11 \cdot 101 \text{ deelbaar door } 11 \quad (!)$$

$$1) 1111 \equiv_3 1$$

$$1111 = 370 \cdot 3 + 1$$

$$2) 1111 \equiv_4 3$$

$$1111 = \underbrace{277 \cdot 4}_{1108} + 3$$

$$3) 1111 \equiv_5 1$$

$$1111 = 222 \cdot 5 + 1$$

□ q.e.d.

oef 3.

7

$$\begin{cases} c = 69 \\ n = 91 \\ e = 25 \end{cases}$$

n ontbinden in priemfactoren $91 = 7 \cdot 13$

$$b = (p-1)(q-1) = 6 \cdot 12 = 72$$

$$d = e^{-1} \text{ in } \mathbb{Z}_b$$

$$= 25^{-1} \text{ in } \mathbb{Z}_{72}$$

$$72 = 2 \cdot 25 + 22$$

$$25 = 1 \cdot 22 + 3$$

$$22 = 7 \cdot 3 + 1$$

$\Rightarrow$

$$1 = 22 - 7 \cdot 3$$

$$= 22 - 7(25 - 22)$$

$$= -7 \cdot 25 + 8 \cdot 22$$

$$= -7 \cdot 25 + 8(72 - 2 \cdot 25)$$

$$= +8 \cdot 72 - 23 \cdot 25$$

$$d = -23 \equiv 49 \text{ in } \mathbb{Z}_{72}$$

$$\text{dus } m = c = 69^{49} \text{ mod } 91 = 69^{32} 69^{16} 69^1 \text{ mod } 91$$

$$\text{in } \mathbb{Z}_{91} \text{ is } 69^1 \equiv_{91} -22$$

$$69^2 \equiv_{91} (-22)^2 \equiv 484 \equiv_{91} 80$$

$$(91 \times 4 = 364)$$

$$69^4 \equiv_{91} (80)^2 \equiv 6400 \equiv_{91} 30$$

$$69^8 \equiv_{91} (30)^2 \equiv 900 \equiv_{91} 81$$

$$69^{16} \equiv_{91} (81)^2 \equiv 6561 \equiv_{91} 9$$

$$69^{32} \equiv_{91} 9^2 = 81 \equiv_{91} -10$$

$$m = c = 69^{49} \text{ mod } 91 = (-10) \cdot 9 \cdot (-22) \equiv_{91} 1980 \equiv_{91} 69$$

toevalis?

oef 4. Simpele, ongerichte grafen.

8

a) toppen = 19 (oneven)

$$\sum_{v:1 \rightarrow 19} \deg(v) \geq 95$$

we weten dat $\sum \deg(v) = 2|E(G)|$
handschake

$$\text{er zijn dus minstens } 2|E(G)| \geq 95$$

47 bogen

$$|E(G)| \geq \frac{95}{2} \geq \frac{94}{2} = 47$$

dus 47 bogen en 19 toppen

maximale graad van een top is 18 (want de graf is simpel)

maximaal aantal bogen in de graf is dan $18 \times 19 = 342$.

$$47 \leq \# \text{ bogen} \leq 342$$

Bewijs uit het ongerijnde

stel dat er geen enkele top van graad 6 is en er zijn ^{47 bogen} _{minstens} 47 bogen
dan is het maximum aantal bogen $19 \times \text{maximale graad} = 5$

$$\frac{19 \times 5}{2} = \frac{95}{2} = 46,5$$

dat kan niet (er zijn geen halve bogen)

dus is het maximum aantal bogen = 46

maar er zijn 47 bogen : tegenspraak ∇

$\rightarrow \exists$ een top van graad 6 als $\sum \text{graad} \geq 95$

□

WAAR

4b

4 regulier $\rightarrow$ alle toppen hebben graad 4 (elk vertrekken 4 bogen)

Hamilton graf $\rightarrow$ er is een Hamilton cyclus

(9)

hoe bewijzen we dat G een Euler graf is:

$\Leftrightarrow$ 2) samenhangend

stelling 30

! $\uparrow$ 1) alle toppen hebben een even graad.
(en gebalanceerd)

dit is een a.s.a.

voldoende voorwaarden!

(1) volgt uit 4-regulier $\rightarrow$ alle toppen hebben even graad (gebalanceerd).

(2) is elke hamilton cyclus samenhangend?

$\hookrightarrow$ verbindt alle toppen $\Rightarrow$ graf is samenhangend.

□

WAAR

bipartiet $\xrightarrow{?}$ Euler
 Hamiltongraf $\rightarrow$ even aantal bogen

bipartiet: er is geen cyclus van oneven lengte.
 gesloten paden zijn van even lengte. (*)
 er zijn 2 groepen zodanig dat er geen
 bogen zijn tussen dezelfde groepen

Hamilton: alle toppen zijn verbonden

Hamilton cyclus: er is een cyclus die alle toppen verbindt

$\uparrow$ deze cyclus is van even lengte

(want de graf is bipartiet)

dan alle cycli zijn even

$\downarrow$ een cyclus van even lengte kan alleen
 als alle toppen een even graad
 hebben (**)

$\Rightarrow$ een graf is Euler als ze 1) samenhangend is en
 2) alle graden zijn even.

- 1) de graf is samenhangend omdat er een Hamiltoncyclus is
 2) alle graden zijn even. **



(*) dit is een " $\iff$ " voorwaarde

oef 4c vervolg

(11)

de graf heeft een Hamiltoncyclus van even lengte
(geen oneven lengte want ze is bipartiet)

dat kan alleen met een even aantal bogen $\square$

4d een samenhangende graf waarin elke top even veel toppen op afstand 2 heeft (12)
graffen waarin de samenhangingscomp
↳ vermoeden: geldt alleen voor ^Vcyclische ^{deel}graffen zijn.
(bewezen in de oefeningen?)

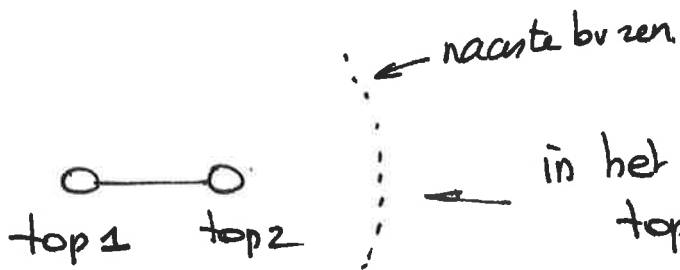
cyclische grafen zijn regulier
en meer in het bijzonder: 2-regulier

□ WAAR

posis tot bewijs van
het vermoeden
→

Oef 4d

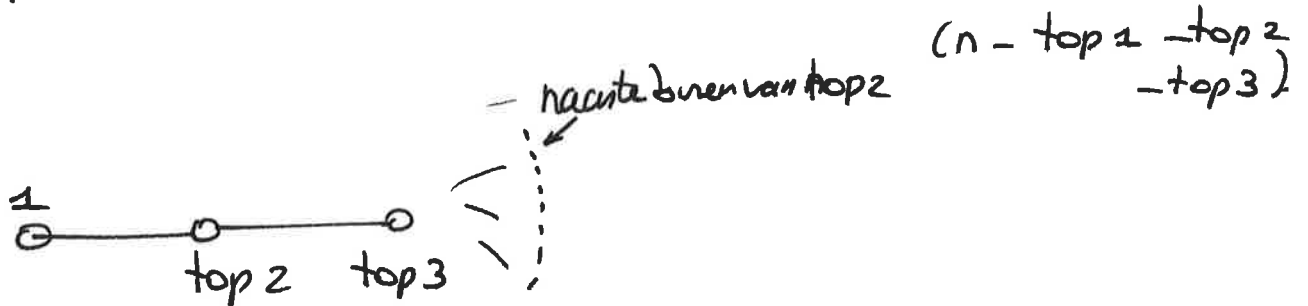
posiç tot bewijs van het vermoeden



in het "maximale" geval heeft
top 1 $n-2$ naaste buizen

in alle andere gevallen heeft
top 1 maximaal een lager
aantal toppen (en verbinden
via een andere buis)

top 2 kan dan maximaal $n-2$ naaste buizen hebben



etc

top n heeft dan maximaal $n - (n-1)$
 $= 1$

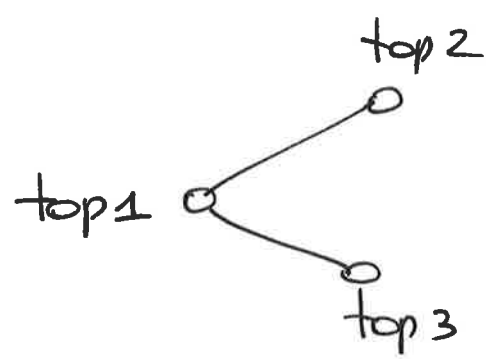
maar dat kan niet want top 3
heeft zeker 2 naaste buizen
(top 1 + een andere)

en alle toppen hebben dezelfde aantal
naaste buizen.

het maximale geval kan dus niet

→ daarom is top 1 minstens verbonden met 2 toppen

→



op top 2 kunnen we voorgaande
opnieuw toepassen

op top 3 ook.

⇓ etc. ?

SAMENHANGIGSSIMP CYCLISCHE GRAF

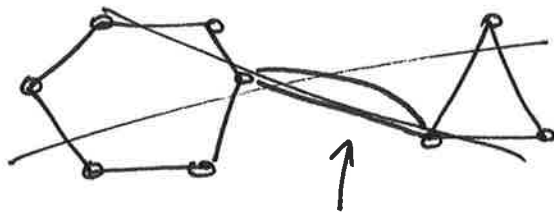
4e.) Hoe tonen we aan dat ieb Hamiltoncyclus is? (15)

→ voldoende # bogen? → niet mogelijk hier.

bv $n=10 \rightarrow$ graad 5 nodig
maar slechts graad 4
gegeven.

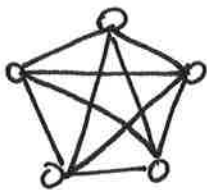
tegenvoorbeeld?

2 samenhangingscomponenten die cyclisch zijn?



→ er is een eulercyclus.

kan niet want de graf moet simpel zijn.



4 regulier & eulercyclus

gn tegenvoorbeeld.

→ heeft een Hamiltoncyclus

vermoeden dat het waar is maar niet te bewijzen?

Omdat het niet te bewijzen is, is het vermoeden daarom
dat het niet waar is (vanuit examentechnische
redenen (☺))

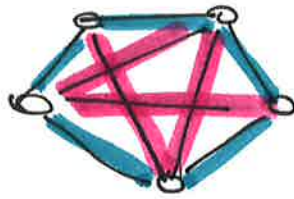
→
pogis tot bewijs

e). in elke 4-reguliere graf.

(16)

Bewijs per inductie.

► eenvoudigste geval $n = 5$



→ Hamilton

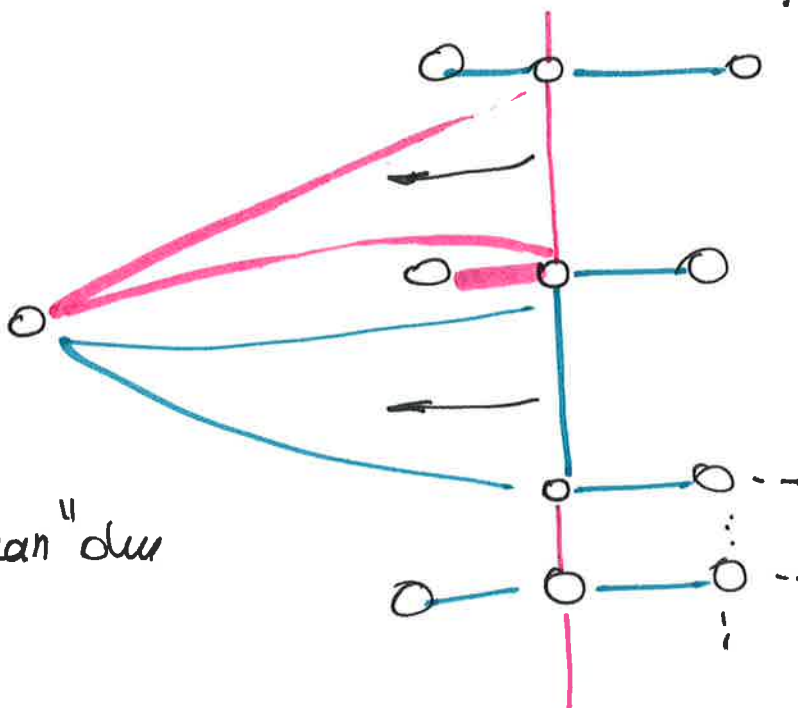
► als het geldt voor $k=k$, geldt het dan ook voor $n = k+1$?

$n+1^e$ top



4-regulier
+ bogen verdeeld
in 2 groepen
zoals in voorw.

↓ zonder algemeenheid te stellen



het "kan" dus

enz

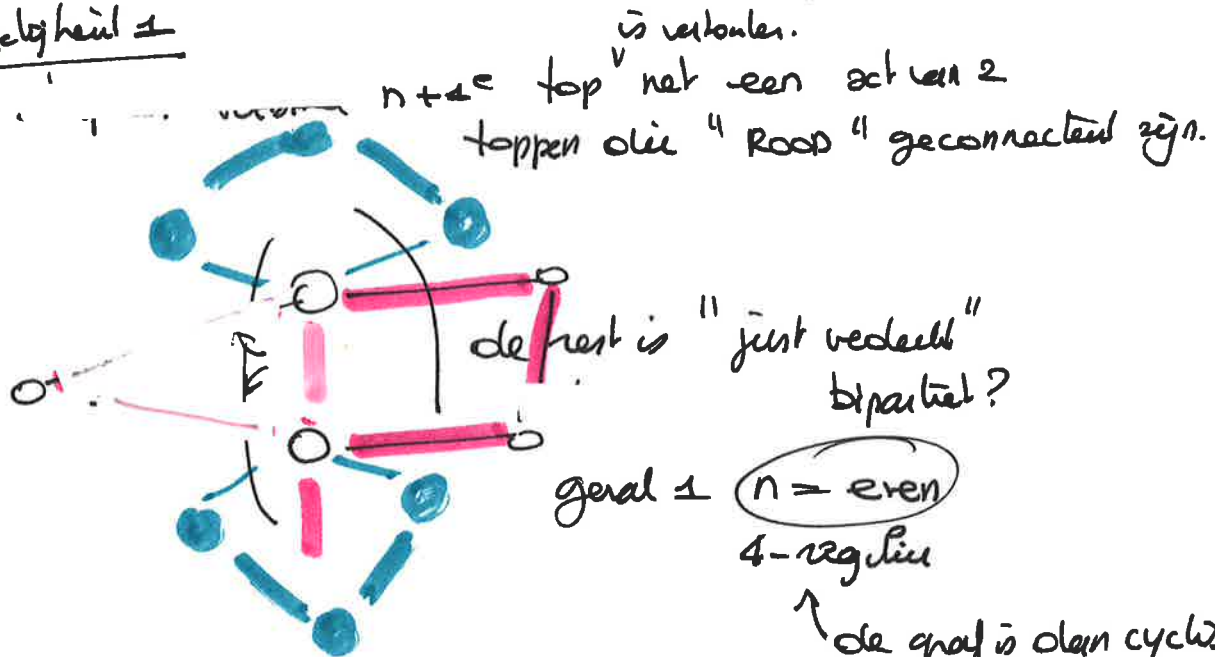
e. Redenering.

Wat zijn de "mogelijkheden"

$n+1$ top is 4-regulier en is dus verbonden met 4 andere toppen in een n toppen verzameling

↓
dit is volgens de inductie hypothese als "juist" verondersteld.

Mogelijkheid 1



geval 1 $n = \text{even}$
4-regulier

↑ de graf is dan cyclisch van even graad.

en zelfs cyclisch van graad 4 met dezelfde kleur.

de blauwe hoes kan je dus sluiten met een cyclus van 4 (2 andere toppen dan de gegeven toppen dan de gegeven + 3 andere even #)

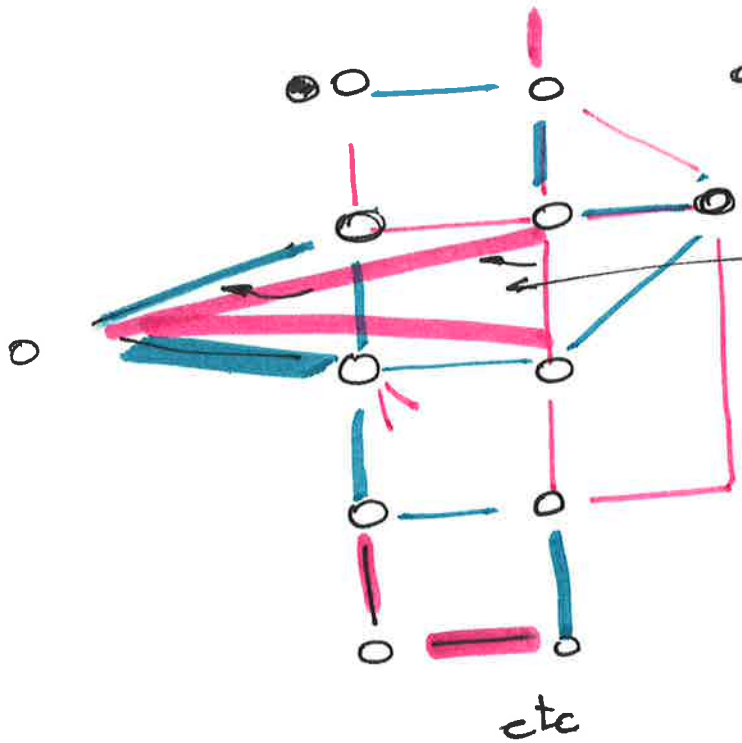
de rode kan je sluiten via 2 andere toppen dan de gegeven top

Analogie voor blauw

geval 2 : $n = \text{oneven}$ (maar $n+1$ is even)

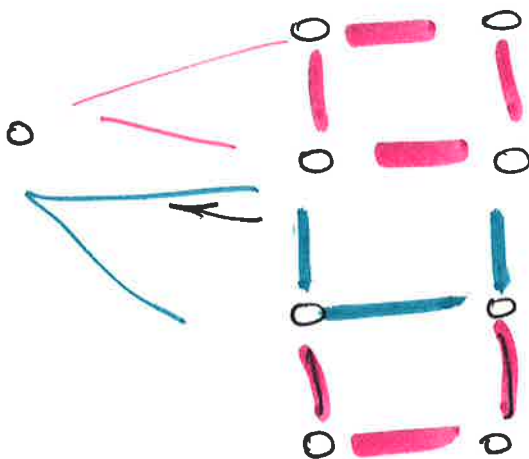
ϕ is 4-regulier

er zijn
ook cycli van 4 maar
het van dezelfde kleur



cycli van 4 zijn
alternatief gekleurd
door het "oneven"
element

geval $n = \text{even}$



brug equivalent

analogue voor start met blauw

ooo

4f

25 toppen net graad 5

$$\sum \deg v = 2 \sum \# \text{bogen} \quad \text{HANDSHAKE}$$

$$\underline{25 \cdot 5} = 2 \cdot \# \text{bogen}$$

$$\# \text{bogen} = \frac{125}{2} ? \quad \text{dat kan niet.}$$

tegen voorbeeld? $\rightarrow$ er bestaan geen
5-reguliere grafen met 25
toppen.

niet waar