

Examen Automaten en Berekenbaarheid

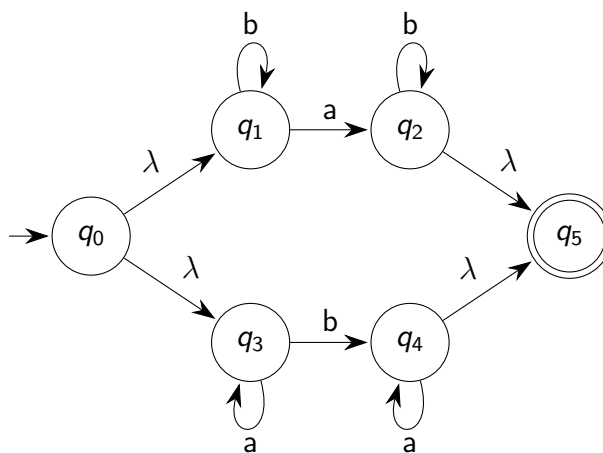
Prof. Dr. Bart Bogaerts
Mathieu Reymond

7/6/2021

Het examen is gesloten boek. Gebruik van hulpmiddelen is niet toegestaan.
Begin voor elke vraag een nieuw blad. Vermeld op elk blad duidelijk je naam en rolnummer.
Zet je GSM af.
Veel succes!

Vraag 1 (4 punten)

Gegeven de volgende NFA M_1 , vind een NFA M_2 waarvoor $L(M_2) = \overline{L(M_1)}$.



Vraag 2 (6 punten)

Zijn de volgende talen (L_1 , L_2 , en L_3) over het vocabularium $\{a, b, c, d\}$ regulier? Zijn ze context-vrij? Zijn ze context-sensitief? Zijn ze recursief? Zijn ze recursief enumereerbaar? Toon al jouw antwoorden aan (voor positieve antwoorden bijvoorbeeld door een grammatica of automaat van de juiste soort op te stellen of door geziene eigenschappen te gebruiken; voor negatieve antwoorden bijvoorbeeld door een pompstelling, een reductie van het halting probleem, of andere geziene eigenschappen te gebruiken). Wanneer je Turing machines construeert mag je een hoogniveau beschrijving van het gedrag geven zonder de transitiefunctie in detail uit te schrijven. Je mag dan gebruik maken van bouwblokken die simpele operaties doen (bijvoorbeeld een TM die optelling of vermenigvuldiging doet).

1. De taal

$$L_1 = \{a^x b^y c^y d^y \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge x \geq 1\} \cup L(b^* c^* d^*)$$

2. Zij e een encoderingsfunctie van Turing Machines als strings over $\{a, b, c, d\}$ (bijvoorbeeld een variant van diegene die we in de les gezien hebben met a , b , c , en d). De taal

$$L_2 = \left\{ e(M) \mid \begin{array}{l} M \text{ is een Turing machine met input alfabet } \{0, 1\} \\ \text{die oneindig lang loopt op de input } 1^{42}0^{42} \end{array} \right\}$$

3. De taal $L_3 = L(G_3)$, waarbij G_3 de volgende grammatica met startsymbool S is:

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid \lambda \\ A \rightarrow Sb \mid \lambda \end{array}$$

Vraag 3 (4 punten)

Deze vraag bestaat uit 12 meerkeuzevragen. Er wordt giscorrectie toegepast. Elk juist antwoord levert je een derde van een punt op. Voor elk fout antwoord verlies je een derde van een punt.

Beschouw de volgende klassen talen:

- Reg: de klasse van reguliere talen
- CF: de klasse van contextvrije talen
- dCF: de klasse van deterministische contextvrije talen
- Rec: de klasse van recursieve talen
- RE: de klasse van recursief enumereerbare talen
- CS: de klasse van contextsensitieve talen
- IrReg: de klasse van niet-reguliere talen (talen die niet regulier zijn)

En beschouw over elke klasse $\mathcal{C}$ de volgende beweringen:

- **RegInt**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van doorsnede met een reguliere taal. Dit wil zeggen, als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \in \text{Reg}$, dan ook $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{C}$.
- **Star**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van Kleene-star. Dit wil zeggen: als $L \in \mathcal{C}$, dan is ook $L^* \in \mathcal{C}$.
- **Reverse**: de klasse talen is gesloten onder de reverse operatie, dit wil zeggen: als $L \in \mathcal{C}$, dan is ook $L^R \in \mathcal{C}$.
- **SymDiff**: de klasse talen is gesloten onder symmetrisch verschil, dit wil zeggen: als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \in \mathcal{C}$, dan is ook $L_1 \triangle L_2 \in \mathcal{C}$, waarbij $L_1 \triangle L_2 = (L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1)$. Met andere woorden: $L_1 \triangle L_2$ bevat alle strings die in exact 1 van beide talen zitten.

Vul voor alle **lege** vakjes in de volgende tabel in of de bewering waar is voor de overeenkomstige klasse talen of niet.

De vakjes gemarkeerd "XXXXXXX" moet je **niet** invullen. Sommige daarvan zijn waar, andere niet.

	Reg	CF	dCF	Rec	RE	CS	IrReg
RegInt		XXXXXXX	XXXXXXX		XXXXXXX	XXXXXXX	
Star	XXXXXXX	XXXXXXX	XXXXXXX			XXXXXXX	XXXXXXX
Reverse	XXXXXXX	XXXXXXX	XXXXXXX	XXXXXXX			
SymDiff			XXXXXXX			XXXXXXX	XXXXXXX

Vraag 4 (3 punten)

In de les hebben we gezien dat het complement van een context-vrije taal niet per se context-vrij is. Het bewijs ging ruwweg als volgt. We weten dat de unie van twee context-vrije talen zelf ook context-vrij is, en we beschouwen de talen

$$L_1 = \{a^x b^x c^y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$

$$L_2 = \{a^x b^y c^y \mid x, y \in \mathbb{N}\}$$

Dan is $L_1 \cap L_2 = \{a^x b^x c^x \mid x \in \mathbb{N}\}$. We weten dat deze taal niet context-vrij is. Maar... doorsnede, unie en complement zijn aan mekaar gerelateerd met de wetten van de Morgan. Dus... kan het complement van een context-vrije taal niet context-vrij zijn.

In dit bewijs worden (impliciet) heel wat complementen genomen (drie, om precies te zijn). Jammer genoeg is dit bewijs niet echt constructief. Het zou veel overtuigender als je me één concrete taal zou kunnen geven die zelf context-vrij is, maar waarvan het complement niet context-vrij is? Kan je **uit dit bewijs** zo'n taal halen (dus: een van de drie voorkomens van complement)? Beargumenteer waarom je antwoord juist is.

Vraag 5 (3 punten)

In de les hebben we gezien dat het quotient van een reguliere taal met een andere reguliere taal ook steeds regulier is. Dus, als L_1 en L_2 regulier zijn, dan is

$$L_1/L_2 = \{w \mid \exists w_2 \in L_2 : ww_2 \in L_1\}$$

opnieuw regulier.

Beschouw nu eens de volgende beweringen. Geef voor elk van de bewering aan of ze juist of fout is. Bespreek de bewijzen. Worden er fouten gemaakt? Zoja, waar? Kan je ze verbeteren? Zijn er stappen die misschien wat te kort door de bocht gaan? Kan je aanvullen?

STELLING 1: *Als L_1 een reguliere taal is en L_2 een recursief enumereerbare taal, dan is L_1/L_2 een context-sensitieve taal.*

BEWIJS VAN STELLING 1: Aangezien L_1 regulier is, bestaat er een NFA voor. Deze NFA is altijd deterministisch. We noemen deze automaat $M_1 = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. Aangezien L_2 recursief enumereerbaar is, bestaat er een Turing Machine M_2 die L_2 accepteert. Beschouw nu de volgende verzameling states

$$F' = \{q \in Q \mid \exists y : M_2 \text{ accepteert } y \text{ en } \delta^*(q, y) \in F\}$$

Deze verzameling is goed gedefinieerd. Dankzij een vleugje magie zien we nu dat $\delta^*(q_0, x) \in F'$ als en slechts als er een y is zodat $xy \in L_1$ en $y \in L_2$. Dus de automaat $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F' \rangle$ accepteert het quotient van L_1 met L_2 . Dit quotient is bijgevolg zeker context-sensitief.

STELLING 2: *Als L_1 regulier is en L_2 context-vrij is, dan is L_1/L_2 niet per se opnieuw context-vrij.*

BEWIJS VAN STELLING 2: Dit is een bewijs uit het ongerijmde. Veronderstel dat het wel zo zijn dat voor elke reguliere taal L_1 en context-vrij taal L_2 , L_1/L_2 context-vrij is. In de cursus hebben we gezien dat er talen bestaan die context-vrij zijn, maar waarvan het complement niet context-vrij is (zie ook vraag 4). Bovendien weten we dat voor elk vocabularium Σ , Σ^* regulier is. Door $L_1 = \Sigma^*$ te nemen voor een welgekozen vocabularium Σ , zouden we krijgen dat het complement van elke context-vrije taal opnieuw context-vrij is, en dat geeft een contradictie.

BONUSVRAAG (2 bonuspunten): *Met deze vraag kan je twee bonuspunten verdienen. Als je ze perfect hebt, kan je dus 22 punten scoren op dit examen! (wie meer dan 20 scoort, krijgt wel slechts 20 als uiteindelijk resultaat) Wat is de sterkste ware stelling die je kan verzinnen, geïnspireerd op de twee voorgaande beweringen (en hun bewijs). Kan je ze ook bewijzen?*