

Examen Automaten en Berekenbaarheid

Prof. Dr. Bart Bogaerts
Mathieu Reymond

31/8/2020

Het examen is gesloten boek. Gebruik van hulpmiddelen is niet toegestaan.

Begin voor elke vraag een nieuw blad. Vermeld op elk blad duidelijk je naam en rolnummer.
Zet je GSM af.

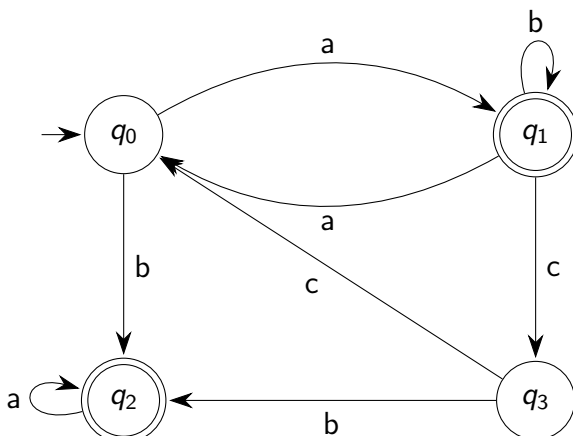
Veel succes!

BELANGRIJK MBT PUNTENVERDELING:

- Vraag 1 is **optioneel**.
 - Indien vraag 1 wordt ingevuld, telt dit mee voor 3 punten en telt vraag 2 ook mee voor drie punten
 - Indien vraag 1 niet wordt ingevuld, **dien je dit duidelijk te vermelden om verwarring met kladpapier te voorkomen** en telt vraag 2 mee voor 6 punten.
- Vraag 3 telt mee voor 4 punten
- Vraag 4 telt mee voor 6 punten
- Vraag 5 telt mee voor 4 punten

Vraag 1

Zet onderstaande automaat om naar een reguliere expressie, door gebruik te maken van de geziene procedures.



Vraag 2

Zijn de volgende talen over het vocabularium $\{a, b\}$ regulier? Zijn ze context-vrij? Zijn ze context-sensitief? Zijn ze (semi-)beslisbaar? Toon al jouw antwoorden aan (voor positieve antwoorden bijvoorbeeld door een grammatica of automaat van de juiste soort op te stellen of door geziene eigenschappen te gebruiken; voor negatieve antwoorden bijvoorbeeld door een pompstelling, een reductie van het halting probleem, of andere geziene eigenschappen te gebruiken). Wanneer je Turing machines construeert mag je een hoogniveau beschrijving van het gedrag geven zonder de transitiefunctie in detail uit te schrijven. Je mag dan gebruik maken van bouwblokken die simpele operaties doen (bijvoorbeeld een TM die optelling of vermenigvuldiging doet).

1. $\{a^i b^j a^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, k = i + j, i > j, \text{ en } j < 42\}$
2. $\{a^i b^j a^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}, k = i \cdot j\}$
3. $\{w \in \{a, b\}^* \mid \text{de lengte van } w \text{ is oneven en het middelste symbool van } w \text{ is een } a\}$

Vraag 3

Is het volgend probleem beslisbaar? Indien ja, geef een Turing machine die dit probleem beslist. Je mag hiervoor gebruik maken van gezien uitbreidingen zoals meerdere tapes. Indien neen, toon aan door middel van een reductie van een probleem waarvan we gezien hebben dat het onbeslisbaar is.

Input: Een context-vrije grammatica G over een alfabet Σ .

Probleem: Bevat $L(G)$ een "square"? (Een "square" is een woord w van de vorm $w = v^2$ (met $v \in \Sigma^*$)?)

Hint: Deze oefening kan vrij compact opgelost worden.

Hint: Hebben we beslisbaarheid van gelijkaardige problemen besproken in de cursus?

Vraag 4

Deze vraag bestaat uit 24 meerkeuzevragen. Er wordt giscorrectie toegepast. Elk juist antwoord levert je een kwart van een punt op. Voor elk fout antwoord verlies je een kwart van een punt.

Beschouw de volgende klassen talen:

- Reg: de klasse van reguliere talen
- CF: de klasse van contextvrije talen
- dCF: de klasse van deterministische contextvrije talen
- Rec: de klasse van recursieve talen
- RE: de klasse van recursief enumereerbare talen
- CS: de klasse van contextsensitieve talen

En beschouw over elke klasse $\mathcal{C}$ de volgende beweringen:

- **Diff**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van set difference. Dit wil zeggen, als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \in \mathcal{C}$, dan ook $L_1 \setminus L_2 = \{w \in L_1 \mid w \notin L_2\} \in \mathcal{C}$.
- **RegInt**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van doorsnede met een reguliere taal. Dit wil zeggen, als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \in \text{Reg}$, dan ook $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{C}$.
- **CountU**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van aftelbare unies. Dit wil zeggen: als $L_0, L_1, L_2, \dots$ in $\mathcal{C}$ zitten, dan is ook

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i \in \mathcal{C}.$$

- **Concat**: de klasse talen is gesloten onder concatenatie. Dit wil zeggen: als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \in \mathcal{C}$, dan is ook $L_1 L_2 \in \mathcal{C}$.
- **Star**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van Kleene-star. Dit wil zeggen: als $L \in \mathcal{C}$, dan is ook $L^* \in \mathcal{C}$.

Vul voor alle **lege** vakjes in de volgende tabel in of de bewering waar is voor de overeenkomstige klasse talen of niet.

De vakjes gemarkeerd "XXXXXXX" moet je **niet** invullen. Sommige daarvan zijn waar, andere niet.

	Reg	CF	dCF	Rec	RE	CS
Diff		XXXXXXX	XXXXXXX			XXXXXXX
RegInt	XXXXXXX	XXXXXXX		XXXXXXX		XXXXXXX
CountU	XXXXXXX		XXXXXXX	XXXXXXX	XXXXXXX	
Concat		XXXXXXX	XXXXXXX	XXXXXXX		XXXXXXX
Star	XXXXXXX		XXXXXXX	XXXXXXX	XXXXXXX	

Duid bovendien voor elk van de volgende beweringen aan of ze waar zijn of niet:

Bewering	Waar/fout
Alle reguliere talen zijn context-vrij. Om aan te tonen dat reguliere talen gesloten zijn onder een bepaalde operatie, is het dus voldoende om dit voor context-vrije talen te bewijzen. Het omgekeerde geldt niet.	
Voor elke NFA bestaat er een equivalente NFA die slechts 1 initiële toestand heeft en slechts 1 finale toestand heeft.	
Een deterministische context-vrije taal kan geen oneindig lange woorden bevatten	
De klasse van talen die beschreven kunnen worden door middel van een DFA is een strikte deelklasse van de klasse van reguliere talen.	
Een s -grammar is nooit ambigu.	
Het probleem "Gegeven een context-vrije grammatica G en een woord w , is $w \in L(G)$?" is beslisbaar"	
Als L een reguliere taal is, dan bestaat er een getal m zodat elke string $w \in L$ kan opgesplitst worden in $w = a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_k^{i_k}$ met $ a_1 a_2 \dots a_k \leq m$.	
Het gebruik van leftmost derivations kan een ambiguous context-vrije grammatica niet-ambigu maken.	
Er bestaan push-down automaten die niet deterministisch zijn maar toch een deterministische context-vrije taal definiëren.	
Het probleem "gegeven een context-vrije grammatica, definieert deze een oneindige taal" is beslisbaar	
Alle recursieve talen zijn recursief enumereerbaar.	
Turing's these (die overigens niet bewezen is) zegt dat alle goed gedefiniëerde problemen kunnen opgelost worden met Turing Machines.	
Indien een grammatica G regels van de vorm $xA \rightarrow \dots$ bevat, is de taal $L(G)$ niet context-vrij.	

Vraag 5

Beschouw de volgende twee beweringen, telkens met bewijs. Zijn ze correct? De bewijzen zijn helaas onvolledig. Doe voor elke bewering het volgende:

- Als de bewering waar is, vervolledig dan het bewijs zodat er geen speld meer tussen te krijgen is.
- Als de bewering vals is, argumenteer dan precies waar in het bewijs er iets foutiefs gebeurt.

Bewering 1: *De klasse van deterministische context-vrije talen is gesloten onder concatenatie. Dit wil zeggen: als L_1 en L_2 deterministische context-vrije talen zijn, dan is L_1L_2 ook een deterministische context-vrije taal.*

Bewijs Er bestaan deterministische PDAs M_1 en M_2 zodat $L(M_1) = L_1$ en $L(M_2) = L_2$. We zullen deze gebruiken om een automaat voor L_1L_2 te maken. Zonder verlies aan algemeenheid kunnen we veronderstellen dat M_2 zijn startsymbool nooit van de stack wist. Beschouw nu de automaat die zich eerst als M_1 gedraagt, maar zodra M_1 in een accepterende toestand terecht komt, het startsymbool van M_2 bovenop de stack toevoegt en overgaat naar de initiele toestand van M_2 . Aangezien M_2 zijn startsymbool nooit wist, zal deze machine zich netjes gedragen als eerst M_1 en vervolgens M_2 uitvoeren. Bijgevolg accepteert de geconstrueerde machine de taal L_1L_2 .

Bewering 2: *Er bestaan deterministische context-vrije talen L_1 en L_2 zodat L_1L_2 geen deterministische context-vrije taal is.*

Bewijs Beschouw eerst de volgende talen: $K_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en $K_2 = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. We weten zeker dat $K_1 \cup K_2$ geen deterministische context-vrije taal (dCFL) is. Beschouw nu de taal cK_1 , dit is $\{ca^n b^n\}$. Aangezien K_1 een dCFL is, is cK_1 dat ook. Het is ook gemakkelijk in te zien dat $L_2 := cK_1 \cup K_2$ een dCFL is. De taal $L_1 := L(c^*)$ is ook een dCFL. We beweren nu dat L_1L_2 geen dCFL is. Stel dat L_1L_2 wel een dCFL zou zijn. Aangezien de klasse van dCFLs gesloten is onder reguliere intersectie, zou dan ook $L(ca^*b^*) \cap L_1L_2$ een dCFL zijn. Maar deze taal is gelijk aan $cK_1 \cup cK_2$. Om dezelfde reden als waarom $K_1 \cup K_2$ niet deterministisch is, is ook deze taal niet deterministisch.