

Examen Automaten en Berekenbaarheid

Prof. Dr. Bart Bogaerts
Mathieu Reymond

8/6/2020

Het examen is gesloten boek. Gebruik van hulpmiddelen is niet toegestaan.

Begin voor elke vraag een nieuw blad. Vermeld op elk blad duidelijk je naam en rolnummer. Zet je GSM af.

Veel succes!

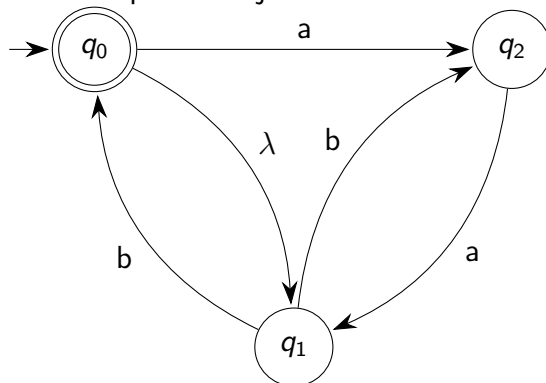
BELANGRIJK MBT PUNTENVERDELING:

- Vraag 1 is **optioneel**.
 - Indien vraag 1 wordt ingevuld, telt dit mee voor 3 punten en telt vraag 2 ook mee voor drie punten
 - Indien vraag 1 niet wordt ingevuld, **dien je dit duidelijk te vermelden om verwarring met kladpapier te voorkomen** en telt vraag 2 mee voor 6 punten.
- Vraag 3 telt mee voor 4 punten
- Vraag 4 telt mee voor 6 punten
- Vraag 5 telt mee voor 4 punten

Vraag 1

Zet onderstaande NFA (non-deterministic finite automaton) om naar een **minimale** DFA (deterministic finite automaton), door gebruik te maken van de geziene procedures. Teken het resultaat.

Leg in elke stap uit wat je doet.



Vraag 2

Zijn de volgende talen over het vocabularium $\{a, b\}$ regulier? Zijn ze context-vrij? Zijn ze context-sensitief? Zijn ze (semi-)beslisbaar? Toon al jouw antwoorden aan (voor positieve antwoorden bijvoorbeeld door een grammatica of automaat van de juiste soort op te stellen of door geziene eigenschappen te gebruiken; voor negatieve antwoorden bijvoorbeeld door een pompstelling, een reductie van het halting probleem, of andere geziene eigenschappen te gebruiken). Wanneer je Turing machines construeert mag je een hoogniveau beschrijving van het gedrag geven zonder de transitiefunctie in detail uit te schrijven. Je mag dan gebruik maken van bouwblokken die simpele operaties doen (bijvoorbeeld een TM die optelling of vermenigvuldiging doet).

1. $\{a^p \mid p = n! \text{ voor een positief natuurlijk getal } n\}$ (herinner dat $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)
2. $\{a^i b^j a^k \mid i + j \neq k\}$
3. $\{w \in \{a, b\}^* \mid \text{elke opeenvolging van } a\text{'s in } w \text{ bevat minstens 3 } a\text{'s}\}$

Vraag 3

Is het volgend probleem beslisbaar? Indien ja, geef een Turing machine die dit probleem beslist. Je mag hiervoor gebruik maken van gezien uitbreidingen zoals meerdere tapes. Indien neen, toon aan door middel van een reductie van een probleem waarvan we gezien hebben dat het onbeslisbaar is.

Input: Een (encoding van) een reguliere expressie r . Een (encoding van) een standaard Turing machine M .

Probleem: Accepteert M alle strings uit $L(r)$?

Vraag 4

Deze vraag bestaat uit 24 meerkeuzevragen. Er wordt giscorrectie toegepast. Elk juist antwoord levert je een kwart van een punt op. Voor elk fout antwoord verlies je een kwart van een punt.

Beschouw de volgende klassen talen:

- Reg: de klasse van reguliere talen
- CF: de klasse van contextvrije talen
- dCF: de klasse van deterministische contextvrije talen
- Rec: de klasse van recursieve talen
- RE: de klasse van recursief enumereerbare talen
- CS: de klasse van contextsensitieve talen

En beschouw over elke klasse $\mathcal{C}$ de volgende beweringen:

- **Comp**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van complement. Dit wil zeggen, als $L \in \mathcal{C}$, dan ook $\bar{L} \in \mathcal{C}$.
- **Int**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van doorsnedes. Dit wil zeggen, als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \in \mathcal{C}$, dan ook $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{C}$.
- **RegInt**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van doorsnede met een reguliere taal. Dit wil zeggen, als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \in \text{Reg}$, dan ook $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{C}$.
- **Subset**: de klasse talen is gesloten onder het nemen van deelverzamelingen. Dit wil zeggen, als $L_1 \in \mathcal{C}$ en $L_2 \subseteq L_1$, dan ook $L_2 \in \mathcal{C}$.

Vul voor alle **lege** vakjes in de volgende tabel in of de bewering waar is voor de overeenkomstige klasse talen of niet. Bijvoorbeeld, voor het vakje gemarkeerd als “YYYYYYY” dat **niet** ingevuld dient te worden zou het antwoord “ja” zijn. Immers de klasse van reguliere talen is gesloten onder het nemen van complement; het complement van een reguliere taal is opnieuw regulier.

Het vakje gemarkeerd “ZZZZZZZ” hebben we niet in de cursus gezien, maar is ook waar: de klasse van context-sensitieve talen is gesloten onder complement.

De vakjes gemarkeerd “XXXXXXX” moet je ook **niet** invullen. Sommige daarvan zijn waar, andere niet.

	Reg	CF	dCF	Rec	RE	CS
Comp	YYYYYYY					ZZZZZZZ
Int					XXXXXXX	
RegInt	XXXXXXX			XXXXXXX	XXXXXXX	
Subset		XXXXXXX	XXXXXXX		XXXXXXX	XXXXXXX

Duid bovendien voor elk van de volgende beweringen aan of ze waar zijn of niet:

Bewering	Waar/fout
Voor elke ambigue context-vrije grammatica bestaat er een niet-ambigue context-vrije grammatica die dezelfde taal definiëert	
Voor elke reguliere taal L_r bestaat er een minimale NFA (een NFA M met $L(M) = L_r$ waarvoor er geen NFA met minder toestanden L ook accepteert)	
Elke links-lineaire grammatica definiëert een context-vrije taal	
Er bestaan geen reguliere talen over een leeg alfabet	
Het is voor geen enkele Turing machine M mogelijk om te beslissen of M eindigt met de lege string als input of niet	
Voor elke context-vrije taal bestaat er een context-vrije grammatica die zowel in Chomsky normaalvorm als in Greibach normaalvorm is	
Voor elke standaard Turing machine M en elke string w bestaat er een machine H die altijd stopt zodat H in een finale toestand stopt als en slechts als M stopt op w .	
De pompstelling voor context-vrije talen geldt ook voor reguliere talen.	
Als L een recursieve taal is, en M een standaard Turing machine die L accepteert, dan stopt M altijd.	
Context-vrije talen zijn altijd oneindig	

Vraag 5

Beschouw de volgende twee beweringen. Zijn ze juist of niet? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld (bewijs de correcte bewering(en) formeel en geef een tegenvoorbeeld voor de foutieve bewering(en)).

Bewering 1: Zij L een context-vrije taal (al dan niet eindig). Dan bestaat er een natuurlijk getal k zodanig dat voor elke string $w \in L$ met $|w| \geq k$ er een $j \in \mathbb{N}$ bestaat met $0 < j < k$ zodat voor elk natuurlijk getal i , L ook een string bevat met lengte $|w| + j \cdot i$.

Bewering 2: Zij L een context-vrije taal (al dan niet eindig). Dan bestaan er een natuurlijk getal k en een natuurlijk getal j met $0 < j < k$ zodanig dat voor elke string $w \in L$ met $|w| \geq k$ en elk natuurlijk getal i , L ook een string bevat met lengte $|w| + j \cdot i$.