



VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL



LOGICA & FORMELE SYSTEMEN

Samenvatting

29 oktober 2024

Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen

Inhoudsopgave

1	Propositielogica	2
1.1	Inleiding	2
1.2	Syntaxis	2
1.2.1	Alfabet	2
1.2.2	Formules	2
1.2.3	Terminologie	2
1.2.4	Formuleschema en instantie	2
1.2.5	Substitutie	3
1.2.6	Constructieboom	3
1.3	Semantiek	3
1.3.1	Waarheidswaarden	3
1.3.2	Waarheidstabellen en waardering	4
1.3.3	Model	4
1.3.4	Tautologie en contradictie	5
1.3.5	Logisch equivalent	5
1.3.6	Functioneel volledig	6
1.3.7	Disjunctieve normaalvorm	6
1.4	Geldig gevolg	6
1.4.1	Geldig gevolg	6
1.4.2	Semantische tableaux	7
1.5	Afleidingen	8
1.5.1	Afleidbaar	9
1.5.2	Syntactisch consistent	9
1.5.3	Stellingen	9

1 Propositielogica

1.1 Inleiding

1.2 Syntaxis

1.2.1 Alfabet

Het **alfabet** van de propositielogica bestaat uit:

1. een verzameling **propositieletters**
2. de logische symbolen: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$
3. de hulpsymbolen: $)$ en $($

1.2.2 Formules

De formules van de propositielogica worden als volgt gedefinieerd:

1. elke propositieletter is een formule
2. als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3. niets anders is een formule

Uitdrukkingen in de propositielogica noemen we formules. Hiervoor worden griekse letters gebruikt.

Opm: Bovenstaande definitie is een voorbeeld van een **inductieve definitie**.

Inductieve definitie

Een inductieve definitie heeft 3 kenmerkende onderdelen:

1. een basisstap waarin bepaalde dingen meteen tot objecten van de gewenste soort verklaard worden;
elke propositieletter is een formule
2. 1 of meer opbouwstappen die verdere constructieprincipes geven om objecten te maken;
als φ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook formules
3. een afsluitende stap die bepaalt dat alles wat niet in eindig veel stappen met behulp van 1 en 2 gevormd kan worden, geen toegestaan object is.
niets anders is een formule

1.2.3 Terminologie

Propositieletters zijn **atomaire formules** en worden ook **atomen** genoemd. Deze zijn niet meer te ontleden in kleinere formules.

vorm	uitspraak	naam
$\neg\varphi$	niet phi	negatie
$(\varphi \wedge \psi)$	phi en psi	conjunctie
$(\varphi \vee \psi)$	phi of psi	disjunctie
$(\varphi \rightarrow \psi)$	als phi dan psi	implicatie
$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	phi dan en slechts dan als psi	equivalentie

1.2.4 Formuleschema en instantie

$(\varphi \wedge \psi)$ is een abstracte vorm, geen concrete formule, we noemen dit een **formuleschema**.

Een **instantie** van het formuleschema ontstaat als we "echte" formules invullen, bv $(p \wedge q)$, $(p \wedge p)$, $((p \rightarrow q) \wedge ((r \rightarrow s) \rightarrow q))$.

1.2.5 Substitutie

Notatie: $[\psi/p]\varphi$

Uitspraak: substitueren van ψ voor p in φ .

Definitie

1. $[\psi/p]\varphi = \psi$ als $\varphi = p$
 $[\psi/p]\varphi = \varphi$ als φ een propositieletter is en $\varphi \neq p$
2. $[\psi/p]\neg\varphi = \neg[\psi/p]\varphi$
 $[\psi/p](\varphi \wedge \chi) = ([\psi/p]\varphi \wedge [\psi/p]\chi)$
 $[\psi/p](\varphi \vee \chi) = ([\psi/p]\varphi \vee [\psi/p]\chi)$
 $[\psi/p](\varphi \rightarrow \chi) = ([\psi/p]\varphi \rightarrow [\psi/p]\chi)$
 $[\psi/p](\varphi \leftrightarrow \chi) = ([\psi/p]\varphi \leftrightarrow [\psi/p]\chi)$

Voorbeeld:

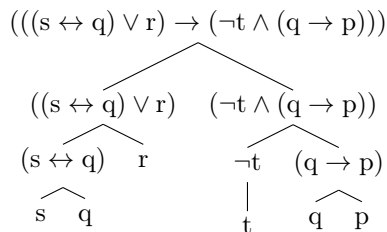
$$\psi = (r \wedge s)$$

$$[\psi/p](p \wedge q) = ((r \wedge s) \wedge q)$$

1.2.6 Constructieboom

De opbouw van een formule kan gegeven worden door een **constructieboom**.

Voorbeeld: $((s \leftrightarrow q) \vee r) \rightarrow (\neg t \wedge (q \rightarrow p))$



Opmerkingen:

- Men kan bewijzen dat elke formule exact 1 constructieboom heeft
- Haakjes zijn heel belangrijk
 - Ze geven het bereik aan van connectieven
 - Ze leggen de constructie eenduidig vast
- Zinnen in natuurlijke taal zijn niet eenduidig vast te leggen

1.3 Semantiek

1.3.1 Waarheidswaarden

De betekenis van een formule is zijn **waarheidswaarde**, **waar** of **onwaar**.

Voor **atomen** kunnen we de waarheidswaarde niet verder analyseren en moeten we waarheidswaarde **veronderstellen**.

Voor **samengestelde formules** gebruiken we de **waarheidstabellen** van de connectieven.

1.3.2 Waarheidstabellen en waardering

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	ψ	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1

Elke rij is een bepaalde situatie. We noemen dit een **waardering**. Een waardering is een functie van propositieletters naar waarheidswaarden.

Als er n verschillende propositieletters in een formule voorkomen, dan heeft de waarheidstabel van de formule 2^n rijen.

Gevolg: waarheidstabellen kunnen zeer groot worden

Definitie

Een **waardering** is een functie van alle propositieletters naar waarheidswaarden.

Opmerkingen:

- in de praktijk gebruiken we een beperkt domein: enkel de propositieletters die voorkomen in de formules die we beschouwen
- We gebruiken vaak de functie naam **V**

1.3.3 Model

Definitie

Een waardering **V** heet een **model van een formule** φ als geldt $V(\varphi) = 1$.

De verzameling van alle modellen van φ noteren we als:

$$\text{MOD}(\varphi) = \{V | V(\varphi) = 1\}$$

Een waardering **V** heet een **model van een formuleverzameling** Σ als **V** een model is van elke formule $\varphi \in \Sigma$.

De verzameling van modellen van Σ noteren we als:

$$\text{MOD}(\Sigma)$$

1.3.4 Tautologie en contradictie

Definitie

Een formule φ heet een **tautologie** als elke waardering een model is van φ , m.a.w. voor elke waardering V geldt: $V(\varphi) = 1$.

Een formule φ heeft een **contradictie** als geen enkele waardering een model is van φ , m.a.w. voor elke waardering V geldt: $V(\varphi) = 0$.

Voorbeelden:

Alle instanties van

- $(\varphi \vee \neg\varphi)$
- $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$

zijn tautologiën.

Alle instanties van

- $(\varphi \wedge \neg\varphi)$

zijn contradicties.

1.3.5 Logisch equivalent

Definitie

Twee formules φ en ψ zijn **logisch equivalent** als de formule $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een tautologie is.

Vaakgebruikte notatie: $\varphi \equiv \psi$

Gevolg Formules φ en ψ zijn logisch equivalent als:

- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ een tautologie is
- Voor elke waardering V geldt $V((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$
- Voor elke waardering V geldt $V(\varphi) = V(\psi)$

Veelgebruikte logische equivalenties

- φ en $\neg\neg\varphi$
- **de wetten van De Morgan**
 - $\neg(\varphi \wedge \psi)$ en $(\neg\varphi \vee \neg\psi)$
 - $\neg(\varphi \vee \psi)$ en $(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- **de principes van de distributiviteit**
 - $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi))$ en $((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$
 - $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi))$ en $((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$
- contrapositie: $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
- $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\neg\varphi \vee \psi)$
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ en $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$

Lossere notatie Volgende formules zijn ook logisch equivalent (associativiteit):

- $(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi))$ en $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$
- $(\varphi \vee (\psi \vee \chi))$ en $((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$

Dit laat toe om haakjes weg te laten, bv. $((p \wedge q) \wedge r) \wedge s$ kunnen we ook schrijven als $(p \wedge q \wedge r \wedge s)$. Ook buitenste haakjes worden vaak weggelaten: $p \wedge q \wedge r \wedge s$.

1.3.6 Functioneel volledig

Definitie

Een verzameling van connectieven $\mathbf{C}$ heet **functioneel volledig** als elke formule φ logisch equivalent is met een formule ψ die enkel connectieven uit $\mathbf{C}$ bevat.

Stelling: De verzameling $\{\neg, \wedge, \vee\}$ is functioneel volledig.

Gevolg: De verzameling $\{\neg, \vee\}$ is functioneel volledig wegens de tautologie $(\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi))$.

1.3.7 Disjunctieve normaalvorm

Definitie

Een formule is in **disjunctieve normaalvorm** als deze de syntactische vorm heeft van een disjunctie van conjuncties:

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{n_1}) \vee \dots \vee (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{n_k})$$

waarbij $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_1}, \dots, \psi_1, \dots, \psi_{n_k}$ atomen of negaties van atomen zijn.

Voorbeelden:

Disjunctieve normaalvorm:

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg a \wedge b)$
- $a \wedge \neg b \wedge c$
- $a \vee \neg b \vee c$

Geen disjunctieve normaalvorm:

- $\neg(a \wedge b)$
- $a \vee (b \wedge (c \vee d))$

Stelling Voor elke formule φ bestaat er een formule φ^* in disjunctieve normaalvorm zodat φ en φ^* logisch equivalent zijn.

1.4 Geldig gevolg

1.4.1 Geldig gevolg

Definitie

Een formule ψ heet een **geldig gevolg** van een verzameling formules Σ als elk model van Σ ook een model is van ψ .

Notatie: $\Sigma \models \psi$

Alternatieve notatie: de gevolgtrekking Σ/ψ is geldig.

Als $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ schrijven we ook $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$

Tautologie Wat als $\Sigma = \emptyset$

- elke waardering is een model van $\emptyset$
- $\models \psi$ betekent dat ψ een **tautologie** is (waar voor elke waardering)

Tegenvoorbeeld Indien ψ niet een geldig gevolg is van Σ noteren we dit als

$$\Sigma \not\models \psi$$

Er bestaat dan een model V van Σ dat geen model is van ψ . Het model V heet dan een **tegen-voorbeeld** van $\Sigma \models \psi$.

Voorbeeld: $q, p \rightarrow q \not\models p$
 $V(q) = 1, V(p) = 0$

Geldig gevolg vs waarheid Geldig gevolg en waarheid zijn niet hetzelfde!

$$p \vee q, \neg q \wedge r \models p \wedge r$$

Maar de waardering $V(p) = V(q) = V(r) = 0$ maakt alle formules onwaar.

Bekende geldige gevolgen

- $\varphi, \neg\varphi \models \psi$ voor alle ψ
- contrapositie: $\varphi \rightarrow \psi \models \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$
- hypothetisch syllogisme: $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \models \varphi \rightarrow \chi$
- disjunctief syllogisme: $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \models \psi$

1.4.2 Semantische tableaux

Idee semantische tableaux: we zoeken naar een tegenvoorbeeld. Als we geen tegenvoorbeeld vinden, is het een geldig gevolg.

Sequent

Definitie

Een **sequent** is een rijtje van de vorm

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$$

met $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_m$ formules.

Een waardering V heet een **tegenvoorbeeld van een sequent** $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$ indien $V(\varphi_1) = \dots = V(\varphi_n) = 1$ en $V(\psi_1) = \dots = V(\psi_m) = 0$

Een segment $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$ waarbij er een i en j bestaan zodat $\varphi_i = \psi_j$ heeft geen tegenvoorbeelden (belangrijke eigenschap, volgt uit de definitie).

Proces Een semantisch tableau is een schema waarin we op systematische wijze het mogelijke bestaan van tegenvoorbeelden van een gegeven sequent reduceren tot dat van 1 of meer overzichtelijkere sequenten.

Bepalen of $\varphi_1, \dots, \varphi_n / \psi$ een tegenvoorbeeld heeft doen we door een semantisch tableau te maken van $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi$.

Reductieregels Een sequent wordt gereduceerd met behulp van reductieregels.
Notatie: Φ is een rijtje $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, Ψ is een rijtje $\psi_1, \dots, \psi_m$.

Boom Door het toepassen van reductieregels verkrijgen we een boom. Als er geen reductieregel meer toegepast kan worden spreken we van een semantisch tableau.

Elke tak in een semantisch tableau correspondeert met een route om een tegenvoorbeeld te vinden.

Open/gesloten Een tak heet **gesloten** indien links en rechts in het sequent dezelfde formule optreedt.

Een tak heet **open** wanneer de tak niet gesloten is en er geen reductieregels meer toegepast kunnen worden.

Een tableau heet **gesloten** indien alle takken gesloten zijn.
Een tableau heet **open** indien er minstens 1 tak open is.

Dus: geldig gevolg indien een tableau gesloten is.

Semantisch consistent

Definitie

Een formuleverzameling Σ is **(semantisch) consistent** als Σ een model heeft.

Een formuleverzameling die niet consistent is heet **inconsistent**.

Consistentie via semantisch tableau $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ is consistent desda er een $\mathbf{V}$ bestaat zodat $\mathbf{V}(\varphi_1) = \dots = \mathbf{V}(\varphi_n) = 1$.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ$ heeft een tegenvoorbeeld desda er een $\mathbf{V}$ bestaat zodat $\mathbf{V}(\varphi_1) = \dots = \mathbf{V}(\varphi_n) = 1$.

Dus: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ is consistent desda $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ$ een tegenvoorbeeld heeft (open tableau).

Tautologie via semantisch tableau Een formule φ is een tautologie indien voor elke waardering $\mathbf{V}$ geldt dat $\mathbf{V}(\varphi) = 1$. Of equivalent indien er geen waardering $\mathbf{V}$ bestaat zodat $\mathbf{V}(\varphi) = 0$.

$\circ \varphi$ heeft een tegenvoorbeeld indien er een waardering $\mathbf{V}$ bestaat zodat $\mathbf{V}(\varphi) = 0$.

Een formule φ is een tautologie indien er geen tegenvoorbeeld bestaat voor $\circ \varphi$ (gesloten tableau).

Adequaatheidsstelling $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ desda er bestaat een gesloten tableau voor $\varphi_1, \dots, \varphi_n \circ \psi$.

1.5 Afleidingen

In het vorig deel bekeken we geldigheid van een gevolgtrekking op een semantische wijze. Nu gaan we dit op een syntactische manier benaderen.

- bewijzen of afleiden van de conclusie uit de aannames

Natuurlijke deductie Alle regels samen vormen het afleidingssysteem van de **natuurlijke deductie**.

1.5.1 Afleidbaar

Definitie

Een formule φ heet **afleidbaar** uit een verzameling aannames Σ als er een afleiding bestaat van φ waarin aan het eind alleen nog aannames uit Σ van kracht zijn.

Notatie: $\Sigma \vdash \varphi$

Indien $\Sigma = \emptyset$, dan heet φ een **stelling**. Notatie: $\vdash \varphi$

Indien φ niet afleidbaar is uit Σ noteren we $\Sigma \not\vdash \varphi$

1.5.2 Syntactisch consistent

Definitie

Een verzameling formules Γ heet **(syntactisch) consistent** wanneer er geen formule φ is waarvoor zowel $\Gamma \vdash \varphi$ als $\Gamma \vdash \neg\varphi$ geldt.

Een verzameling formules die niet consistent is heet **inconsistent**.

Voorbeelden: Syntactisch consistent: $\{\neg p, p \rightarrow q, q\}$

Syntactisch inconsistent: $\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$

1.5.3 Stellingen

Een formuleverzameling Γ is consistent desda er bestaat een formule φ zodat $\Gamma \not\vdash \varphi$.

$\Gamma \not\vdash \varphi$ desda $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ is consistent.

Volledigheidsstelling Als Σ een formuleverzameling is en φ een formule, dan geldt: $\Sigma \vdash \varphi$ desda $\Sigma \models \varphi$

- correctheid: als $\Sigma \vdash \varphi$ dan $\Sigma \models \varphi$
- volledigheid: als $\Sigma \models \varphi$ dan $\Sigma \vdash \varphi$