

Logica theorie januari 2024

Propositielogica

Syntaxis

Regels voor geldige uitdrukkingen



Alfabet

Het alfabet van de propositielogica bestaat uit:

- Een verzameling propositieletters
- De logische symbolen: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$
- De hulpsymbolen $)$ en $($



Formules

De formules van de propositielogica worden als volgt gedefinieerd:

- Elke propositieletter is een formule
- Als ϕ en ψ formules zijn, dan ook $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$
- Niets anders is een formule



Propositieletters

Atomaire formules, ze zijn niet meer deelbaar



ϕ en ψ zijn abstracte formules, p en q zijn hier meestal de instantiatie van



Substitutie

$$1. [\psi/p]\phi = \psi \text{ als } \phi = p$$

$$[\psi/p]\phi = \phi \text{ als } \phi \text{ een propositieletter is en } \phi \neq p$$

$$2. [\psi/p]\neg\phi = \neg[\psi/p]\phi$$

$$[\psi/p](\phi \wedge \chi) = ([\psi/p]\phi \wedge [\psi/p]\chi)$$

$$[\psi/p](\phi \vee \chi) = ([\psi/p]\phi \vee [\psi/p]\chi)$$

$$[\psi/p](\phi \rightarrow \chi) = ([\psi/p]\phi \rightarrow [\psi/p]\chi)$$

$$[\psi/p](\phi \leftrightarrow \chi) = ([\psi/p]\phi \leftrightarrow [\psi/p]\chi)$$

Semantiek

Betekenis van uitdrukkingen



Betekenis van een formule

Zijn waarheidswaarde, waar of onwaar (1/0)



Model

Een waardering V heet een model van een formule ϕ als geldt $V(\phi) = 1$

De verzameling van alle modellen van ϕ wordt genoteerd als

$$MOD(\phi) = \{V | V(\phi) = 1\}$$

Een waardering V heet een model van een formuleverzameling Σ als geldt

$$\forall \phi \in \Sigma : V(\phi) = 1$$



Tautologie

Een formule waarvan elke waardering een formule is.



Contradictie

Een formule waarvoor er geen waardering bestaat die een model is.



Logisch equivalent

Twee formules zijn equivalent als $(\phi \leftrightarrow \psi)$ een tautologie is.

Wetten van De Morgan:

- $\neg(\phi \vee \psi) \equiv (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
- $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$

Distributiviteit:

- $(\phi \wedge (\psi \vee \chi))$ en $((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$
- $(\phi \vee (\psi \wedge \chi))$ en $((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))$

Contrapositie:

- $(\phi \rightarrow \psi)$ en $(\neg\psi \rightarrow \neg\phi)$

Alternatieve notatie voor $\rightarrow$ en $\leftrightarrow$:

- $\rightarrow$: $(\neg\phi \vee \psi)$
- $\leftrightarrow$: $((\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi))$

Associativiteit: Als je alleen te maken hebt met conjuncties en disjuncties mag je de haakjes weglaten



Functioneel volledig

Een verzameling C van connectieven heet functioneel volledig als elke formule ϕ logisch equivalent is met een formule ψ die enkel connectieven uit C bevat.

Stelling: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ is functioneel volledig, hieruit volgt ook dat $\{\neg, \vee\}$ functioneel volledig is wegens de wetten van De Morgan



Disjunctieve normaalvorm

Een formule die de syntactische vorm heeft van een disjunctie van conjuncties:

$$(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_{n_1}) \vee \dots \vee (\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_{n_k})$$

Waarbij $\phi_1, \dots, \phi_{n_1}, \dots, \psi_1, \dots, \psi_{n_k}$ atomen of negaties van atomen zijn.

Stelling: Voor elke formule ϕ bestaat er een formule ϕ^* in disjunctieve normaalvorm zodat deze logisch equivalent zijn.

Geldig gevolg



Een formule ψ heet een geldig gevolg van een verzameling formules Σ als elk model van Σ ook een model is van ψ

Notatie: $\Sigma \models \phi$

Bekende geldige gevolgen:

- $\phi, \neg\phi \models \psi$ voor alle ψ
- Contrapositie: $\phi \rightarrow \psi \models \neg\psi \rightarrow \neg\phi$
- Hypothetisch syllogisme: $\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \models \phi \rightarrow \chi$
- Disjunctief syllogisme: $\phi \vee \psi, \neg\phi \models \psi$



Tautologie

Als $\Sigma = \emptyset$ betekent het dat elke waardering een model is van $\emptyset$, een formule is dus een tautologie als het een geldig gevolg is uit de lege verzameling.

Notatie: $\models \psi$



Tegenvoorbeeld

Een waardering V die een model is van Σ maar niet van ψ

Notatie: $\Sigma \not\models \psi$



Semantische tableaux

- Een sequent is een rij van de vorm $\phi_1, \dots, \phi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$
- Een waardering V heeft een tegenvoorbeeld indien $V(\phi_1) \dots V(\phi_n) = 1$ en $V(\psi_1) \dots V(\psi_m) = 0$
- Een segment $\phi_1, \dots, \phi_n \circ \psi_1, \dots, \psi_m$ waarbij er i en j bestaan zodat $\phi_i = \psi_j$ heeft geen tegenvoorbeelden

Werkwijze: bepalen of $\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$ een tegenvoorbeeld heeft door een semantisch tableau op te lossen in de vorm $\phi_1, \dots, \phi_n \circ \psi$, als alle takken sluiten dan is er geen tegenvoorbeeld, anders wel. Een tak is gesloten als links en rechts in het sequent dezelfde formule optreedt



Semantisch consistent

Een formuleverzameling Σ is semantisch consistent als Σ een model heeft, dus $\Sigma \circ$ is een open tableau



Tautologie via semantisch tableau

Een formule is een tautologie als ϕ een gesloten tableau is



Adequaatheidsstelling

$\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$ als en slechts als $\phi_1, \dots, \phi_n \circ \psi$ een gesloten tableau is (bewijs: metatheorie)

Afleidingen



Natuurlijke deductie

Systeem van introductie- en eliminatieregels die annames en conclusies hanteren



Afleidbaar

Een formule ϕ heet afleidbaar uit een verzameling aannames Σ als er een natuurlijke deductie bestaat van ϕ waarin enkel nog formules uit Σ van kracht zijn.

Notatie: $\Sigma \vdash \phi$

Als $\Sigma = \emptyset$, dan heet ϕ een stelling.

Notatie: $\vdash \phi$

Als ϕ niet afleidbaar is uit Σ noteren we $\Sigma \nvdash \phi$



Syntactisch consistent

Een verzameling formules Γ heet syntactisch consistent als er geen formule ϕ bestaat waarvoor zowel $\Gamma \vdash \phi$ als $\Gamma \vdash \neg\phi$ geldt

- Stelling 1: Een formuleverzameling Γ is consistent desda er bestaat een formule ϕ zodat $\phi \nvdash \Gamma$
- Stelling 2: $\Gamma \nvdash \phi$ desda $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ is consistent
- Volledigheidsstelling: Als Σ een formuleverzameling is en ϕ een formule, dan geldt : $\Sigma \vdash \phi$ desda $\Sigma \models \phi$

Metatheorie

Beweringen over het systeem zelf



Inductieve definitie: stappenplan

Een inductieve definitie heeft 3 onderdelen:

1. Een basisstap waarin bepaalde dingen meteen tot objecten van de gewenste soort verklaard worden; *elke propositieletter is een formule*
2. 1 of meer opbouwstappen die verdere constructieprincipes geven om objecten te maken; *als ϕ en ψ formules zijn, dan zijn $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ ook formules*
3. Een afsluitende stap die bepaalt dat alles wat niet in eindig veel stappen met behulp van 1 en 2 gevormd kan worden, geen toegestaan object is. *niets anders is een formule*



Functionele volledigheid: bewijs

Stelling: De verzameling $\{\neg, \wedge\}$ is functioneel volledig.

Bewijs: We bewijzen voor elke formule: er bestaat een formule ϕ' zodanig dat $\phi \equiv \phi'$ die enkel connectieven uit $\{\neg, \wedge\}$ bevat.

Basisstap: Als $\phi = p$, neem dan $\phi' = p$, de formule ϕ' bevat geen connectieven, $\phi \equiv \phi'$

Inductiestap: Veronderstel dat er ϕ' en ψ' bestaan die enkel connectieven uit $\{\neg, \wedge\}$ bevatten zodat $\phi \equiv \phi'$ en $\psi \equiv \psi'$ (IH)

$$\begin{aligned}\neg\phi &\equiv_{IH} \neg\phi' \\ (\phi \wedge \psi) &\equiv_{IH} (\phi' \wedge \psi') \\ (\phi \vee \psi) &\equiv_{IH} (\neg\phi \wedge \neg\psi) \\ (\phi \rightarrow \psi) &\equiv_{IH} \neg(\phi' \wedge \neg\psi') \\ (\phi \leftrightarrow \psi) &\equiv_{IH} (\neg(\phi' \rightarrow \psi') \wedge \neg(\psi' \rightarrow \neg\phi'))\end{aligned}$$



Dualiteit (Bewijs niet te kennen)

Laat ϕ een formule zijn die enkel bestaat uit $\{\wedge, \vee, \neg\}$. De duale vorm van ϕ genoteerd als ϕ^d is de formule die ontstaat door elke conjunctie te vervangen door een disjunctie en omgekeerd.

Stelling: $\models \phi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \models \phi^d \leftrightarrow \psi^d$



Adequaatheidsstelling

Stelling: $\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$ als en slechts als $\phi_1, \dots, \phi_n \circ \psi$ een gesloten tableau is

- Hulpstelling 1: $\Phi \circ \Psi$ is de topsequent van een gesloten tableau, dan geldt $\Phi \models \Psi$ (voor elke waardering V die alle formules in Φ waarmaakt is er minstens 1 formule in Ψ die waar is)
- Hulpstelling 2: Een open tableau heeft een tak τ die niet sluit. Zij waardering V die alle propositieletters links waar en rechts onwaar maakt, dan geldt er voor elke formule ϕ : als ϕ links op de tak voorkomt is $V(\phi) = 1$, anders 0.

Bewijs Hulpstelling 1

- $\Rightarrow$ Stel uit het ongerijmde dat er geen gesloten tableau bestaat. Alle tableaux zijn open, dus er is een waardering V die alles links op de tak waar maakt en rechts vals, uit hulpstelling 2 volgt dat dit in tegenspraak is met $\phi_1, \dots, \phi_n \models \psi$
- $\Leftarrow$ Speciaal geval van hulpstelling 1:
 - Stel $\Phi \circ \Psi$ is de topsequent van een gesloten tableau, dan geldt $\Phi \models \Psi$
 - Basisstap: Het tableau heeft 1 knoop, er is sluiting in het topsequent en er is een formule ϕ die zowel links als rechtsvoorkomt. Neem een waardering V die alle formules in Φ waarmaakt, er volgt dus $V(\phi) = 1$, aangezien ϕ in Φ en Ψ zit, volgt $\Phi \models \Psi$
 - Inductiestap: Veronderstel dat de eigenschap geldt voor tableau met minder dan $k > 1$ knopen, we tonen aan dat de eigenschap ook geldt voor een tableau met k knopen.
 - Geval: $\neg L$ regel. we hebben een gesloten tableau en willen aantonen dat $\Phi, \neg\alpha \models \Psi$. Neem willekeurige V die alles in Φ en α waarmaakt, uit de IH volgt $\Phi \models \Psi, \alpha$. Aangezien V alles in Φ en de negatie van α waarmaakt, geldt dat V een formule in Ψ waarmaakt.
 - Geval $\wedge R$ -regel: idem, V maakt de formules in Φ waar dus oftewel maakt V een formule in Ψ waar of α of β

Bewijs hulpstelling 2

- We bewijzen dit via formule inductie, basisstap: Voor alle propositieletters geldt de bewering automatisch
- Inductiestap: (IH) stel de bewering geldt voor α en β
- Geval 1: Stel $\neg\alpha$ komt links op de tak voor. ergens moet de $\neg L$ regel toegepast zijn waardoor α rechts voorkomt, dus $V(\alpha) = 1$

Gevolg

Stel $\Phi \circ \Psi$ is de topsequent van een gesloten tableau: dan sluiten alle tableaux voor $\Phi \circ \Psi$.

Bewijs: Uit hulpstelling 1 volgt $\Phi \models \Psi$. Stel dat er een tableau bestaat die niet sluit, dan bestaat er volgens hulpstelling 2 een waardering die alle formules links waar en rechts

onwaar maakt. Dit is een tegenstrijdigheid



Syntactisch consistent: bewijs

Stelling 1: Een formuleverzameling Γ is consistent desda er bestaat een formule ϕ zodat $\phi \not\vdash \Gamma$

$\Rightarrow$ Gegeven dat Γ consistent is, per def betekent dit dat er geen ϕ bestaat zodat $\Gamma \vdash \phi$ en $\Gamma \vdash \neg\phi$. Neem een willekeurige α , dan geldt een van de bovenstaande. als $\Gamma \not\vdash \alpha$ dan is α de gezochte formule, als $\Gamma \not\vdash \neg\alpha$, dan is $\neg\alpha$ de gezochte formule

$\Leftarrow$ Contrapositie. Als Γ inconsistent is bestaat er per def een formule zodat $\Gamma \vdash \neg\phi$ en $\Gamma \vdash \phi$. Volgens de $\neg$ eliminatieregel kan je dan elke formule afleiden uit Γ . er bestaat dus geen enkele formule ϕ zodat $\Gamma \not\vdash \phi$



Volledigheidsstelling (bewijs niet te kennen)

Als Σ een formuleverzameling is en ϕ een formule, dan geldt $\Sigma \vdash \phi$ desda $\Sigma \models \phi$

Predikaatlogica

Syntaxis



Alfabet

- Verzameling C van individuele constanten
- Verzameling P van predikaatletters
- Verzameling F van functieletters
- De logische symbolen: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall$ en $\exists$
- De hulpsymbolen $)$ en $($



Plaatsigheid

Het aantal argumenten dat een functie of predikaatletter heeft, meestal aangeduid met indices

$\rightarrow$ Een propositieletter is een 0-plaatsige predikaatletter



Term

1. Individuele variabelen en constanten zijn termen
2. Als f een k -plaatsige functieletter is en $t_1, \dots, t_k$ zijn termen, dan is $f(t_1, \dots, t_k)$ ook een term
3. Niets anders is een term



Formule

1. Als P een k -plaatsige predikaatletter is en $t_1, \dots, t_k$ zijn termen, dan is $P(t_1, \dots, t_k)$ een formule
2. Als ϕ en ψ formules zijn, dan ook $\neg\phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$
3. Als ϕ een formule is en x een variabele, dan zijn $\forall x\phi$ en $\exists x\phi$ ook formules
4. Niets anders is een formule



Vrije en gebonden variabelen

Een voorkomen van x heet vrij als deze niet in het bereik van een kwantor ligt.

- Een zin/gesloten formule is een formule zonder vrije variabelen
- Een open formule is een formule met vrije variabele(n)



Substitutie

1. Laat t en t' termen zijn en x een variabele. Dan is $[t/x]t'$ de term die ontstaat door elk voorkomen van x in t' te vervangen door t .
2. Laat ϕ een formule zijn, t een term en x een variabele. Dan is $[t/x]\phi$ de formule die ontstaat door elk VRIJ voorkomen van x in ϕ te vervangen door t . Ook wel instantie van ϕ genoemd

Veilige substitutie: Een term t heet vrij voor x in ϕ als in $[t/x]\phi$ geen variabele van t gebonden wordt. Preventie: alfabetische variant, substitutie van een variabele met een andere letter om verwarring te voorkomen

Semantiek



Structuur

Een structuur $\mathcal{D}$ is een drietal $\langle D, R, O \rangle$ waarbij:

- D , een niet-lege verzameling, het domein is (bv $\mathbb{N}$)
- R : een verzameling relaties op D
- O : een verzameling operaties op D



Interpretatiefunctie

Een interpretatiefunctie I is een functie die aan:

- Elke individuele constante c een speciaal object $I(c) \in O$ (0-plaatsig),
- Elke predikaatletter P een relatie $I(P) \in R$ (zelfde plaatsigheid) en
- Elke functieletter f een operatie $I(f) \in O$ (zelfde plaatsigheid) toekent.



Model

Een paar (D, I) met D een structuur en I een interpretatiefunctie heet een model.

→ Een oneindig model is een model met een oneindig domein



Bedeling

Een bedeling b is een functie die aan elke variabele x een object $b(x) \in D$ toekent



Waardering van termen

Zij $M = (D, I)$ een model en b een bedeling. De semantische waardering $V_{M,b}$ van termen is:

- $V_{M,b}(a) = I(a)$ voor constanten a
- $V_{M,b}(x) = b(x)$ voor variabelen x
- $V_{M,b}(f(t_1, \dots, t_k)) = I(f)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_k))$



Waardering van formules

Zij $M = (D, I)$ een model en b een bedeling. De semantische waardering $V_{M,b}$ van formules is:

- $V_{M,b}(P(t_1, \dots, t_k)) = 1 \Leftrightarrow I(P)(V_{M,b}(t_1), \dots, V_{M,b}(t_k))$ geldt
- $V_{M,b}(\neg\phi) = 1 \Leftrightarrow V_{M,b}(\phi) = 0$ idem andere connectieven
- $V_{M,b}(\exists x\phi) = 1 \Leftrightarrow$ er is een $d \in D$ zodat $V_{M,b[x \mapsto d]}(\phi) = 1$
- $V_{M,b}(\forall x\phi) = 1 \Leftrightarrow$ voor alle $d \in D$ geldt $V_{M,b[x \mapsto d]}(\phi) = 1$

Alternatieve notatie: $M, b \models \phi$



Geldig gevolg van modellen

Een paar $M = (D, I)$ is een model van een formule ϕ indien voor elke bedeling b geldt $V_{M,b}(\phi) = 1$



Eigenschap waarheidsfunctie

Laat $x_1, \dots, x_k$ de vrije variabelen van ϕ zijn en b_1 en b_2 bedelingen zodat $b_1(x_i) = b_2(x_i)$ voor alle $i = 1, \dots, k$ en een model M .

Dan geldt $V_{M,b_1}(\phi) = V_{M,b_2}(\phi)$



Eigenschap substitutie

Voor alle termen t en t' en een variabele x geldt:

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$



Geldig gevolg

Zij Σ een verzameling formules en ψ een formule. Dan $\Sigma \models \psi$ als voor elk model M en bedeling b geldt dat als voor elke $\phi \in \Sigma$ geldt dat $V_{M,b}(\phi) = 1$ dan geldt ook $V_{M,b}(\psi) = 1$



Universeel geldig

Zij ψ een formule, we zeggen dat ψ universeel geldig is indien $\models \psi$ (tautologie).

$\models \Sigma$ betekent dat minstens 1 van de formules in Σ universeel geldig is



Logisch equivalent

Als voor formules ϕ en ψ geldt dat $\models \phi \leftrightarrow \psi$ dan heten ϕ en ψ logisch equivalent.



Theorie

De theorie van een model M is gedefinieerd als $Th(M) = \{\phi \mid \phi \text{ een zin en } M \models \phi\}$



Axiomaverzameling

Een formuleverzameling Σ axiomatiseert $Th(M)$ als voor alle zinnen ϕ geldt:

$$\phi \in Th(M) \Leftrightarrow \Sigma \models \phi$$



Modelverzameling

De modelverzameling van een zin ϕ is gedefinieerd als

$$MOD(\phi) = \{M \mid M \models \phi\}$$

Geldig gevolg



Eigenschap semantische tableaux bij predikaatlogica

- Als het tableau sluit, is de gevolgtrekking geldig
- Het tableau is eindig met een open tak, de gevolgtrekking is niet geldig
- Het tableau blijft oneindig doorlopen, de gevolgtrekking is niet geldig (ze leveren wel een tegenvoorbeeld op met een oneindig domein, geen bewijs)



Stelling van Church

De predikaatlogica is niet beslisbaar; er bestaat geen algoritme om voor een willekeurige formule te bepalen of deze een geldig gevolg is van een formule(verzameling) of niet, bij propositielogica is dit wel het geval

Afleidingen

Metatheorie



Substitutie

$$V_{M,b}([t/x]t') = V_{M,b[x \mapsto V_{M,b}(t)]}(t')$$

bewijs slides



Prenexvorm

$\neg$: Als ϕ en ψ formules zijn en x een variabele, dan geldt:

- $\forall x \neg \phi$ en $\neg \exists x \phi$
- $\exists x \neg \phi$ en $\neg \forall x \phi$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
 V_{M,b}(\forall x \neg \phi) = 1 &\Leftrightarrow \forall d \in D : V_{M,b[x \mapsto d]}(\neg \phi) = 1 \\
 &\Leftrightarrow \forall d \in D : V_{M,b[x \mapsto d]}(\phi) = 0 \\
 \bullet &\Leftrightarrow \neg \exists d \in D : V_{M,b[x \mapsto d]}(\phi) = 1 \\
 &\Leftrightarrow V_{M,b}(\exists x \phi) = 0 \\
 &\Leftrightarrow V_{M,b}(\neg \exists x \phi) = 1
 \end{aligned}$$

$\wedge, \vee$: Als ϕ en ψ formules zijn en x is een variabele is die niet vrij voorkomt in ψ , dan zijn volgende formules logisch equivalent:

- $(\exists x \phi) \wedge \psi$ en $\exists x(\phi \wedge \psi)$
- $(\forall x \phi) \wedge \psi$ en $\forall x(\phi \wedge \psi)$
- ...

Bewijs:

$$\begin{aligned}
 V_{M,b}((\exists x \phi) \wedge \psi) = 1 &\Leftrightarrow V_{M,b}(\exists x \phi) = 1 \wedge V_{M,b}(\psi) = 1 \\
 &\Leftrightarrow \exists d \in D : V_{M,b[x \mapsto d]}(\phi) = 1 \wedge V_{M,b}(\psi) = 1 \\
 \bullet &\Leftrightarrow \exists d \in D : V_{M,b[x \mapsto d]}(\phi) = 1 \wedge V_{M,b[x \mapsto d]}(\psi) = 1 \\
 &\Leftrightarrow \exists d \in D : V_{M,b[x \mapsto d]}(\phi) = 1 \wedge V_{M,b}(\phi \wedge \psi) = 1 \\
 &\Leftrightarrow V_{M,b}(\exists x(\phi \wedge \psi)) = 1
 \end{aligned}$$

$\rightarrow$: Als ϕ en ψ formules zijn en x is een variabele is die niet vrij voorkomt in ψ , dan zijn volgende formules logisch equivalent

- $(\forall x \phi) \rightarrow \psi$ en $\exists x(\phi \rightarrow \psi)$
- $(\exists x \phi) \rightarrow \psi$ en $\forall x(\phi \rightarrow \psi)$
- $\psi \rightarrow (\forall x \phi)$ en $\forall x(\psi \rightarrow \phi)$
- $\psi \rightarrow (\exists x \phi)$ en $\exists x(\psi \rightarrow \phi)$

Bewijs

$$(\forall x \phi) \rightarrow \psi \equiv \neg(\forall x \phi) \vee \psi \equiv \exists x(\neg \phi) \vee \psi \equiv \exists x(\neg \phi \vee \psi) \equiv \exists x(\phi \rightarrow \psi)$$

Prenexstelling: Voor elke formule ϕ bestaat er steeds een logisch equivalente formule in prenexvorm



Adequaatheidsstelling (zonder bewijs)

Als Σ een formuleverzameling is en ϕ een formule, dan geldt:

$$\Sigma \models \phi \text{ desda er bestaat een gesloten tableau voor } \Sigma \circ \phi$$



Volledigheidsstelling (zonder bewijs)

Voor elke formuleverzameling Σ en elke formule ϕ geldt:

$$\Sigma \vdash \phi \text{ desda } \Sigma \models \phi$$

- Correctheid $\Sigma \vdash \phi$ impliceert $\Sigma \models \phi$
- Volledigheid $\Sigma \models \phi$ impliceert $\Sigma \vdash \phi$

Lambda Calculus



Definitie lambda expressies

Zij V een verzameling variabelen. De verzameling van λ -expressies Λ is:

- $V \subseteq \Lambda$
- Als $M \in \Lambda$ en $N \in \Lambda$ dan is $(M)N \in \Lambda$ (applicatie)
- Als $x \in \Lambda$ en $M \in \Lambda$ dan is $\lambda x.M \in \Lambda$ (abstractie)
- Niets anders zit in Λ .



Abstractie

Aanmaak van een lambda expressie



Applicatie

Oproep van een lambda expressie



Currying

Lambda expressies kunnen 1 argument hebben, dus het nesten van meerdere lambda expressies om zo meerdere argumenten door te geven in 1 keer



Vrije variabelen van een λ -expressie

- $\forall x \in V : VV(x) = \{x\}$
- $\forall M, N \in \Lambda : VV(M(N)) = VV(M) \cup VV(N)$
- $\forall x \in V, \forall M \in \Lambda : VV(\lambda x.M) = VV(M) \setminus \{x\}$

Een lambda expressie zonder vrije variabelen wordt gesloten/een combinator genoemd



Substitutie

De substitutie $[P/x]M$ van P voor x in M wordt als volgt gedefinieerd:

1. $[P/x]x = P$
2. $[P/x]y = y$ als $y \in V \setminus \{x\}$
3. $[P/x](F)Q = ([P/x]F)[P/x]Q$
4. $[P/x]\lambda x.M = \lambda x.M$
5. $[P/x]\lambda y.M = \lambda y.[P/x]M$ als $y \neq x$ en $y \notin VV(P)$
6. $[P/x]\lambda y.M = \lambda[z/y]M$ als $y \neq x$ en $z \notin VV(P)$ en $y \in VV(P)$



Beta-gelijkheid

De relatie $=_\beta \subseteq \Lambda \times \Lambda$ wordt gedefinieerd als:

- $(\beta)(\lambda x.M)P =_\beta [P/x]M$
- $(\alpha)\lambda x.M =_\alpha [z/x]M$ als $z \notin VV(M)$
- (reflexief) $M =_\beta M$
- (symmetrisch) $M =_\beta N$ dan $N =_\beta M$
- transitief congruent _____



Hulpdefinitie getallen

Lambda calculus kent geen constanten, toch is het mogelijk om getallen voor te stellen

Beschouw λ -expressies F en M . De expressie $(F)^n M$ wordt gedefinieerd als

- $(F)^0 \equiv M$
- $(F)^{1+n} M \equiv (F)(F)^n M$



Beschouw λ -expressies F en M . voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$(F)^{n+m} M \equiv (F)^n (F)^m M$$

Bewijs via inductie op n :

1. Als $n = 0$, dan:

$$\begin{aligned} (F)^{n+m} M &\equiv (F)^m M \\ &\equiv_{DEF} (F)^0 (F)^m M \\ &\equiv (F)^n (F)^m M \end{aligned}$$

2. IH: Stel bewering geldt voor $n = k$ zodat $(F)^{k+m} M \equiv (F)^k (F)^m M$.

We tonen voor

$n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (F)^{(k+1)+m} &\equiv (F)^{1+(k+m)} M \\ &\equiv_{DEF} (F)(F)^{k+m} M \\ &\equiv_{IH} (F)(F)^k (F)^m M \\ &\equiv_{DEF} (F)^{1+k} (F)^m M \\ &\equiv (F)^{k+1} (F)^m M \end{aligned}$$



Church getallen

$$c_n \equiv \lambda f. \lambda x. (f)^n x$$



Opvolger functie

$$succ \equiv \lambda n. \lambda f. \lambda x. (f)((n)f)x$$



Optelling

$$plus \equiv \lambda n. \lambda m. \lambda f. \lambda x. ((n)f)((m)f)x$$



X

$$((c_n)f)^m y =_{\beta} (f)^{n \times m} y$$

$$times \equiv \lambda n. \lambda m. \lambda f. (n)(m)f$$



Nuttige combinatoren

- $true \equiv \lambda t. \lambda f. t$
- $false \equiv \lambda t. \lambda f. f$
- $if \equiv \lambda c. \lambda d. \lambda e. ((c)d)e$
- $iszero \equiv \lambda n. ((n)\lambda x. false)true$
- $cons \equiv \lambda a. \lambda d. \lambda z. ((z)a)d$
- $car \equiv \lambda a. \lambda d. a$
- $cdr \equiv \lambda a. \lambda d. d$