

Examen Logica & Modeltheorie

09 januari 2026

Deel 1: Oefeningen

Oefening 1: Propositionele Logica (20 punten)

Beschouw de atomaire formules p en q .

- a) Construeer een formeel bewijs met behulp van natuurlijke deductie voor de volgende stelling:

$$\vdash ((p \vee q) \rightarrow \neg\neg(p \vee q)) \wedge (\neg\neg(p \vee q) \rightarrow (p \vee q))$$

- b) Toon op basis van de afleiding in onderdeel (a) aan dat de volgende equivalentie geldt:

$$(p \vee q) \equiv \neg\neg(p \vee q)$$

Oefening 2: Predicaatlogica (20 punten)

Vertaal het onderstaande vraagstuk naar predicaatlogica en bewijs de stelling met een semantisch tableau.

Gegeven:

- Er is een project waarbij er minstens één student is die een andere student helpt.
- Als een student geholpen is, dan is hij/zij geslaagd.
- Het project is zo moeilijk dat het onmogelijk is dat een student die een andere student helpt, zelf slaagt.

Definities:

- $H(x, y)$: x helpt y
- $S(x)$: x slaagt

Te bewijzen: Bewijs met behulp van een semantisch tableau dat er minstens één student is die niet slaagt.

Oefening 3: Lambda Calculus (10 punten)

Gegeven zijn de volgende definities:

- **true** $\equiv \lambda t. \lambda f. t$
- **false** $\equiv \lambda t. \lambda f. f$
- $c_0 \equiv \lambda f. \lambda x. x$
- **is_zero** $\equiv \lambda n. n(\lambda x. \text{false})\text{true}$
- **if** $\equiv \lambda b. \lambda x. \lambda y. bxy$

Opdracht: Reduceer de volgende expressie volledig (bereken de uitkomst):

$((\text{if})(\text{iszero})c_0)\text{false}\text{true}$

Deel 2: Theorie

Theorie 1: Propositionele Logica (10 punten)

- A) Geef de formele definitie van **semantische consistentie**.
- B) Geef de formele definitie van **syntactische consistentie**.
- C) Welke stelling beweert dat deze twee concepten equivalent zijn? Leg deze stelling kort uit.

Theorie 2: Predicaatlogica (20 punten)

- A) Gegeven een willekeurig model M en een bedeling b . Formuleer de formele semantische definitie (de waardering) voor de formule:

$$\forall x \phi$$

- B) Gegeven een willekeurig model M en een bedeling b . Formuleer de formele semantische definitie (de waardering) voor de formule:

$$\exists x \phi$$

- C) Bespreek en bewijs de volgende equivalentie:

$$\exists x(\neg \phi) \equiv \neg \forall x(\phi)$$

- D) Wat is de noodzakelijke voorwaarde voor ψ opdat de volgende equivalentie geldt?

$$(\forall x \phi) \wedge \psi \equiv \forall x(\phi \wedge \psi)$$

- E) Bewijs de equivalentie uit vraag (D). U mag hierbij veronderstellen dat aan de voorwaarde uit vraag (D) voldaan is.

Theorie 3: Lambda Calculus (20 punten)

- A) Geef de formele definitie van een **fixpunt** in de Lambda Calculus.
- B) Gegeven de Y-combinator: $Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$.
Construeer hiermee een fixpunt voor een willekeurige functie F .
- C) Bewijs dat de door u geconstrueerde term uit vraag (B) daadwerkelijk een fixpunt is.