

Examen Lineaire Algebra juni 2023-2024

- Reconstructie, verwoording van de vragen is niet helemaal zoals op het examen, essentie is wel hetzelfde.
- 3u, gedeeld met Calculus II
- Puntenverdeling:
 - 20% StudyGPS
 - 80% Examen

Theorie

Waar of Vals (4 ptn.)

Giscorrectie: juist antwoord: +2 punten, geen antwoord: 0 punten, fout antwoord: -1 punt. Dit levert een score op 8, die nadien herschaald wordt naar een score op 4. Een negatieve score op 8 is mogelijk, maar wordt automatisch herleid naar een 0 op 4 voor deze vraag.

1. Gegeven A een 3×3 matrix. A is inverteerbaar als de lineaire transformatie horende bij A injectief en surjectief is.
2. A , B , en C zijn $n \times n$ matrices. Als $AB = AC$, dan geldt altijd $B = C$.
3. Een 4×4 matrix heeft altijd 4 verschillende eigenwaarden.
4. Gegeven vectorruimte V . Als er een lineair onafhankelijke verzameling $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bestaat in v , dan is $\dim V \geq 4$.

Oefeningen

1. Gegeven een lineair stelsel met parameter m . (5 ptn.)

$$\begin{cases} 2x + my + z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- (a) Welke waarde(n) van m geeft oneindig veel oplossingen? Geef telkens de oplossingenverzameling.
(b) Welke waarde(n) van m geeft exact 1 oplossing? Geef telkens de oplossing.
(c) Welke waarde(n) van m geeft geen oplossing?
2. Gegeven een vectorruimte van reële 2×2 matrices. (6 ptn.)

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) Toon aan dat $\xi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
(b) Toon aan dat $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
(c) Bereken $[x]_{\xi}$ met $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
(d) Bereken $P_{B \leftarrow \xi}$ en gebruik dit om $[x]_B$ te berekenen, met $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
3. Beschouw de volgende matrix (5 ptn.)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Bepaal de karakteristieke vergelijking van A , en zoek alle andere eigenwaarden.
(b) Bestaan P en D zodat $A = PDP^{-1}$, met D de diagonaalmatrix? Zo ja, bereken P en D .
(c) Gegeven een matrix $2A$. Wat zijn de eigenwaarden van deze matrix? Leg uit.