

Academiejaar 2023-2024, 1de zittijd, 20 juni 2024

Faculteit Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen

Bachelor Biologie, Chemie, Computerwetenschappen, Computerwetenschappen (schakel-
en verkort programma), Geografie

Vraag 1 (4 ptn)

Vul W (waar) of V (vals, niet waar) in op de daartoe voorziene plaats: _____.

Giscorrectie: juist antwoord: +2 punten, geen antwoord: 0 punten, fout antwoord: -1 punt. Dit levert een score op 8, die nadien herschaald wordt naar een score op 4. Een negatieve score op 8 is mogelijk, maar wordt automatisch herleid naar een 0 op 4 voor deze vraag.

Vul in met waar (W) of vals (V)

- 1 W Stel dat A een 3×3 matrix is. Dan is A inverteerbaar als de lineaire transformatie horende bij A injectief en surjectief is.
 - 2 V Stel dat A , B en C $n \times n$ matrices zijn. Als $AB = AC$ dan volgt altijd dat $B = C$.
 - 3 V Een 4×4 matrix heeft altijd 4 verschillende eigenwaarden.
 - 4 W Zij V een vectorruimte. Als er een lineair onafhankelijke verzameling $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ bestaat in V , dan is $\dim V \geq 4$.
-

Vraag 2 (5 ptn)

Gegeven is het volgende stelsel voor de parameter $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + my + z = 2 \\ x + (m - 1)y + 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

1. Voor welke waarde(n) van m heeft dit stelsel oneindig veel oplossingen. Geef in deze gevallen steeds de oplossingenverzameling.
2. Voor welke waarde(n) van m heeft dit stelsel slechts één oplossing. Geef tevens deze oplossing.
3. Voor welke waarde(n) van m heeft dit stelsel geen oplossingen.

We beschouwen de uitgebreide coëfficiëntenmatrix van het stelsel en reduceren deze tot een echelonvorm.

$$\begin{bmatrix} 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-2 & -1 & 0 \\ 0 & m-2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

We veronderstellen nu dat $m-2 \neq 0$, dan kunnen we de tweede rij delen door $m-2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{m-2} & 0 \\ 0 & m-2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2(m-2)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3m-5}{2(m-2)} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2(m-2)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Er is dus een unieke oplossing als $m \neq 2$. Stel nu $m = 2$. Dan voeren we de volgende rijreducties uit

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De tweede rij toont aan dat dit nu een inconsistent stelsel is. Als $m = 2$ zijn er dus geen oplossingen. De situatie dat er oneindig veel oplossingen zijn, doet zich dus niet voor. We vatten nog eens samen

- Er is een unieke oplossing als $m \neq 2$, en deze is

$$\begin{cases} x &= \frac{3m-5}{2(m-2)} \\ y &= \frac{1}{2(m-2)} \\ z &= -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Er is geen enkele oplossing als $m = 2$, dan is het stelsel inconsistent.
- Dit stelsel heeft nooit oneindig veel oplossingen.

Vraag 3 (6 ptn)

Beschouw de vectorruimte van reële 2×2 matrices:

$$\mathbb{R}^{2 \times 2} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Je moet niet aantonen dat dit een vectorruimte is.

1. Toon aan dat $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ een basis is van $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
2. Toon aan dat $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ een basis is van $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
3. Bereken $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$ met $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
4. Bereken ${}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} P$ en gebruik dit om $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ met $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uit te rekenen.

1. De vier gegeven matrices zijn lineair onafhankelijk als en slechts als de volgende vergelijking heeft enkel de nuloplossing ($a = b = c = d = 0$):

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrixvergelijking levert onmiddellijk $a = b = c = d = 0$. Deze vier matrices zijn dus lineair onafhankelijk. Aangezien we vier lineair onafhankelijke matrices hebben in een 4-dimensionale vectorruimte, vormen deze noodzakelijk een basis.

2. De vier gegeven matrices zijn lineair onafhankelijk als en slechts als de volgende vergelijking heeft enkel de nuloplossing ($a = b = c = d = 0$): Deze vergelijking levert het stelsel

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
$$\begin{cases} a + b & & & = 0 \\ & c + d & & = 0 \\ & c - d & & = 0 \\ a - b & & & = 0 \end{cases}$$

Men kan nu vrij eenvoudig aantonen dat $a = b = c = d = 0$. Deze vier matrices zijn dus lineair onafhankelijk. Aangezien we vier lineair onafhankelijke matrices hebben in een 4-dimensionale vectorruimte, vormen deze noodzakelijk een basis.

3. De coördinaatvector

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

4. Er geldt dat

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} [\mathcal{E}_1]_{\mathcal{B}} & [\mathcal{E}_2]_{\mathcal{B}} & [\mathcal{E}_3]_{\mathcal{B}} & [\mathcal{E}_4]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}$$

De verschillende coördinaatvectoren kan men aflezen uit de gegevens:

$$[\mathcal{E}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathcal{E}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, [\mathcal{E}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, [\mathcal{E}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Dus

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu gebruiken we dat

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}$$

waarmee

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + d \\ a - d \\ b + c \\ b - c \end{bmatrix}.$$

Vraag 4 (5 ptn)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

1. Bepaal de karakteristieke vergelijking van A en zoek tevens alle andere eigenwaarde(n).
2. Ga na of er matrices P en D bestaan zodanig dat $A = PDP^{-1}$, waarbij D een diagonaal-matrix is. Zo ja, bepaal P en D .
3. Beschouw nu de matrix $2A$, wat zijn de eigenwaarde(n) van deze matrix? Leg uit.

1.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)^2(3 - \lambda) - (3 - \lambda) = (3 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 1)$$

Dus

$$p_A(\lambda) = (3 - \lambda)(16 - 8\lambda + \lambda^2 - 1) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = (3 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda - 3).$$

Er zijn dus twee eigenwaarden, $\lambda_1 = 3$, met multipliciteit 2, en $\lambda_2 = 5$, met multipliciteit 1. We bepalen nu de bijorende eigenruimten

- $E_{\lambda_1} = \text{Nul}(A - \lambda_1 I)$, dus

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus $E_{\lambda_1} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. De eigenruimte is 2-dimensionaal, dus de meetkundige multipliciteit van λ_1 is 2, gelijk aan haar algebraïsche multipliciteit.

- $E_{\lambda_2} = \text{Nul}(A - \lambda_2 I)$, dus

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dus $E_{\lambda_2} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. De algebraïsche multipliciteit van λ_2 is gelijk aan 1, dus

noodzakelijk is ook haar meetkundige multipliciteit gelijk aan 1. Op dit punt zijn we zeker dat de matrix gediagonaliseerd kan worden. We kunnen nu eenvoudig de basisvectoren van de eigenruimten als kolommen van de matrix P aflezen, zodat we vinden dat

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$