

Academiejaar 2021-2022, 1ste zitting, 23 juni 2022
Faculteit Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen

**Bachelor Biologie, Chemie, Computerwetenschappen, Computerwetenschappen (schakel-
en verkort programma), Geografie**

NAAM:

ROLNUMMER:

RICHTING:

Kruis aan indien je een vrijstelling hebt voor het onderdeel **calculus**:

☐

Beantwoord Vraag 1 op de ommezijde van deze pagina. Beantwoord de vragen 2 tot en met 4 op afzonderlijke witte bladen. Begin elke hoofdvraag op een nieuw wit blad. Er zijn in totaal 4 hoofdvragen, deze opgavenbundel telt 3 bladzijden.

vul je naam, rolnummer en richting in op deze pagina én op elk van de witte antwoordbladen die je gebruikt.

Schrijf je oplossingen duidelijk leesbaar op met alle tussenstappen en **volledige uitwerking**. Vermeld gebruikte eigenschappen en stellingen. Zorg dat je **werkwijze duidelijk** is. Rekenmachine is **niet** toegelaten.

We wensen je veel succes met het examen!

Schrijf je oplossingen duidelijk leesbaar op met alle tussenstappen en **volledige uitwerking**. Zorg dat je **werkwijze duidelijk** is. Rekenmachine is **niet** toegelaten. We wensen je veel succes met het examen!

Vraag 1 (4 ptn)

Vul W (waar) of V (vals, niet waar) in op de daartoe voorziene plaats: _____.

Giscorrectie: juist antwoord: +2 punten, geen antwoord: 0 punten, fout antwoord: −1 punt. Dit levert een score op 8, die nadien herschaald wordt naar een score op 4. Een negatieve score op 8 is mogelijk, maar wordt automatisch herleid naar een 0 op 4 voor deze vraag.

Vul in met waar (W) of vals (V).

- 1 W Als het systeem $A\vec{x} = \vec{b}$ oneindig veel oplossingen heeft, dan heeft het systeem $A\vec{x} = \vec{0}$ ook oneindig veel oplossingen.
 - 2 W Een 3×3 matrix waarvan de kolomruimte 2-dimensionaal is, heeft determinant 0.
 - 3 W Stel A is een 3×3 matrix met twee verschillende eigenwaarden, namelijk -1 en 1 . Dan is zijn determinant -1 of 1 .
 - 4 W Een basis voor $\mathbb{R}^4$ bestaat altijd uit 4 verschillende vectoren.
-

Vraag 2 (5 ptn)

Beschouw voor de parameter $h \in \mathbb{R}$ de lineaire transformatie

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + z \\ 2x + hy + 2z \\ x + (h + 2)y + 2hz \end{bmatrix}.$$

(a) (1 pnt.) Bepaal de matrix A zodanig dat $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

(b) (4 pnt.) Gebruik deel (a) om na te gaan voor welke waarde(n) van h het stelsel

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

een unieke oplossing, oneindig veel oplossingen of geen oplossing heeft. Geef telkens de oplossingenverzameling.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & h & 2 \\ 1 & h+2 & 2h \end{bmatrix}$, dit volgt onmiddellijk uit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & h & 2 \\ 1 & h+2 & 2h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ 2x+hy+2z \\ x+(h+2)y+2hz \end{bmatrix} = f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right)$$

(b) We moeten dus de oplossingenverzameling van de matrixvergelijking

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & h & 2 \\ 1 & h+2 & 2h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bespreken in functie van de parameter h . We passen elementaire rij-operaties toe op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & h & 2 & 2 \\ 1 & h+2 & 2h & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & h+2 & 2h-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Om de laatste stap te kunnen uitvoeren, hebben we verondersteld dat $h \neq 0$. Nu wordt het ook duidelijk dat de coëfficiëntenmatrix drie spilelementen heeft als en slechts als $h \neq 0$ en $2h-1 \neq 0$. We besluiten: **er is een unieke oplossing als en slechts als $h \neq 0$ en $h \neq \frac{1}{2}$** . In dit geval kunnen we de elementaire rij-operaties verder uitvoeren om de coëfficiëntenmatrix te reduceren tot een gereduceerde rij-echelonvorm

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2h-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De oplossingenverzameling kan dan genoteerd worden als

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Nu bekijken we de resterende gevallen. Het eerste is $h = \frac{1}{2}$. In dat geval reduceert de matrix verder tot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Er zijn twee spilelementen. Gelet op de spilposities, concluderen we de de eerste twee onbekenden gebonden zijn, de derde is vrij. De oplossingenverzameling kan dus genoteerd worden als

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1-t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Het laatste geval tenslotte is het geval waarin $h = 0$. In dat geval reduceert de matrix verder tot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Opnieuw zijn er twee spilelementen. Gelet op de spilposities, concluderen we de eerste twee onbekenden gebonden zijn, de derde is vrij. De oplossingenverzameling kan dus genoteerd worden als

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1-t \\ \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Samenvattend

- Het stelsel heeft een unieke oplossing als en slechts als $h \neq 0$ en $h \neq \frac{1}{2}$.
- Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen als $h = 0$.
- Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen als $h = \frac{1}{2}$.

Vraag 3 (5 ptn)

Beschouw de vectoren

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Is $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ een basis van $\mathbb{R}^3$? Verklaar.
- Zo ja, bepaal $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ en $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ waar $\mathcal{E}$ de standaardbasis is van $\mathbb{R}^3$.
- Bepaal de dimensie van $\text{Nul}(A)$, waar

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 3 & 2 & -1 \\ 29 & 1 & 1 & -1 \\ 31 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- De drie vectoren zijn een basis voor $\mathbb{R}^3$ als en slechts als (i) ze zijn lineair onafhankelijk én (ii) ze spannen de volledige ruimte $\mathbb{R}^3$ op. Omdat 3 de dimensie is van de vectorruimte in kwestie, is het voldoende om (i) te controleren, want we weten dat elk stel van 3 lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^3$ deze ruimte ook volledig opspant.

Er zijn verschillende mogelijkheden om te controleren of deze drie vectoren lineair onafhankelijk zijn. We beschouwen deze drie vectoren als de kolommen van een 3×3 matrix. Indien deze matrix drie spilelementen heeft, kunnen we besluiten dat de vectoren

lineair onafhankelijk zijn. Een eenvoudige toepassing van het rij-reductie algoritme levert inderdaad

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Er zijn dus drie spilelementen, dus het stel vectoren is een lineair onafhankelijk stel vectoren.

- (b) De matrix $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ heeft als kolommen de coördinaatvectoren van de basisvectoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ten opzichte van de standaardbasis $\mathcal{E}$. Aangezien $[\vec{b}_1]_{\mathcal{E}} = \vec{b}_1, [\vec{b}_2]_{\mathcal{E}} = \vec{b}_2, [\vec{b}_3]_{\mathcal{E}} = \vec{b}_3$ geldt

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nu geldt er dat $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$. We kunnen vrij eenvoudig $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}^{-1}$ bepalen:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dus } P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (c) Voor de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 23 & 3 & 2 & -1 \\ 29 & 1 & 1 & -1 \\ 31 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

geldt dat de dimensie van de kolomruimte minstens 3 is. Immers, we zagen reeds dat de drie laatste kolommen lineair onafhankelijk zijn. Anderzijds is de dimensie van de kolomruimte van de matrix A ook hoogstens 3, omdat A slechts 3 rijen heeft. Dus de dimensie van $\text{col}(A)$ is precies gelijk aan 3. Omdat voor een matrix met n kolommen geldt dat $n = \dim \text{col}(A) + \dim \text{nul}(A)$ moet $\dim \text{nul}(A) = 1$.

Vraag 4 (6 ptn)

Zij gegeven de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & h & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ waarbij $h \in \mathbb{R}$.

- (a) (1 pnt.) Bepaal de eigenwaarden van A .
- (b) (3 pnt.) Beschouw $h = 0$. Is A dan diagonaliseerbaar? Zo ja, vind een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $A = PDP^{-1}$. Zo neen, verklaar waarom A niet diagonaliseerbaar is.
- (c) (2 pnt.) Voor welke waarden van $h \in \mathbb{R}$ is A een diagonaliseerbare matrix? Leg uit.

- (a) We bepalen de eigenwaarden van de matrix A door de karakteristieke vergelijking op te lossen. Er geldt

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & h-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Dit wordt, door ontwikkeling volgens de eerste kolom,

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} h-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h-\lambda & 0 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(h-\lambda)(2-\lambda) - (h-\lambda) = (h-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1)$$

Dus $P_A(\lambda) = (h-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$ De eigenwaarden kan men nu eenvoudig bepalen, deze zijn $\lambda_1 = h$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$.

- (b) Er wordt nu verondersteld dat $h = 0$. In dat geval zijn de drie eigenwaarden allemaal verschillend, en is de matrix A diagonaliseerbaar. We bepalen de eigenruimten horend bij de verschillende eigenwaarden.

$$1. E_{\lambda_1} = \text{Nul}(A - 0I) = \text{Nul}(A).$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{De nulruimte } E_{\lambda_1} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$2. E_{\lambda_2} = \text{Nul}(A - 3I)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{De nulruimte } E_{\lambda_2} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$3. E_{\lambda_3} = \text{Nul}(A - I)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De nulruimte $E_{\lambda_3} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

De gevraagde matrices zijn

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Van zodra $h \notin \{1, 3\}$ heeft de matrix A steeds drie verschillende eigenwaarden, en is hij diagonaliseerbaar. We moeten dus enkel nog de gevallen $h = 3$ en $h = 1$ onderzoeken.

1. Stel $h = 3$. Dan zijn de eigenwaarden $\lambda_1 = 3$ met multipliciteit 2 en $\lambda_2 = 1$ met multipliciteit 1. De matrix A is diagonaliseerbaar als en slechts als de meetkundige multipliciteit van λ_1 , dus de dimensie van E_{λ_1} gelijk is aan 2. We bepalen E_{λ_1} :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Er zijn twee spilelementen, dus slechts één vrije veranderlijke, dus $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$. De matrix is niet diagonaliseerbaar.

2. Stel $h = 1$. Dan zijn de eigenwaarden $\lambda_1 = 3$ met multipliciteit 1 en $\lambda_2 = 1$ met multipliciteit 2. De matrix A is diagonaliseerbaar als en slechts als de meetkundige multipliciteit van λ_2 , dus de dimensie van E_{λ_2} gelijk is aan 2. We bepalen E_{λ_2} :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Er zijn twee spilelementen, dus slechts één vrije veranderlijke, dus $\dim(E_{\lambda_2}) = 1$. De matrix is niet diagonaliseerbaar.

Besluit: we zagen in (b) dat de matrix A diagonaliseerbaar is als $h \notin \{1, 3\}$, en we besluiten in (c) dat A niet diagonaliseerbaar is als $h \in \{1, 3\}$.