

Academiejaar 2020-2021, 1ste zitting, 17 juni 2021
Faculteit Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen

**Bachelor Biologie, Chemie, Computerwetenschappen, Computerwetenschappen (schakel-
en verkort programma), Geografie**

NAAM:
ROLNUMMER:
RICHTING:

Kruis aan indien je een vrijstelling hebt voor het onderdeel **calculus**:

☐

Schrijf je oplossingen duidelijk leesbaar op met alle tussenstappen en **volledige uitwerking**. Zorg dat je **werkwijze duidelijk** is. Rekenmachine is **niet** toegelaten. We wensen je veel succes met het examen!

Vraag 1 (4 ptn)

Vul W (waar) of V (vals, niet waar) in op de daartoe voorziene plaats: _____.

Giscorrectie: juist antwoord: +2 punten, geen antwoord: 0 punten, fout antwoord: -1 punt. Dit levert een score op 8, die nadien herschaald wordt naar een score op 4. Een negatieve score op 8 is mogelijk, maar wordt automatisch herleid naar een 0 op 4 voor deze vraag.

Vul in met waar (W) of vals (V).

- 1 V Een 4×5 -matrix kan 5 spilelementen hebben.
- 2 V Een inverteerbare matrix is altijd diagonaliseerbaar.
- 3 W Stel A is een 3×3 matrix met enkel 2 als eigenwaarde. Dan is $\det(A) = 8$.
- 4 W Stel A en B zijn twee 3×3 matrices én $\det(A) \neq 0$.
Dan volgt uit $AB = 0$ (de nulmatrix) dat $B = 0$

Vraag 2 (5 ptn)

Gebruik bladen 2 en 3 (beide zijden) om deze vraag te beantwoorden.

Gegeven de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - 14x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

1. Ga na voor welke $m \in \mathbb{R}$ de vector $\begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{bmatrix}$ behoort tot $T(\mathbb{R}^3)$ (d.i. het bereik of waar-
dengebied van T).
2. Geef, voor de specifieke m die je hierboven bekwam, ook de verzameling van vectoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ zodat $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{bmatrix}$.

Gelet op

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -14 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

moeten we dus bepalen voor welke waarde(n) van de parameter m de matrixvergelijking

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{bmatrix}$$

minstens één oplossing heeft. We passen achtereenvolgens enkele elementaire rij-operaties toe op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -14 & m \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -14 & m \\ 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & m \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 10R_3}$$

Zowel de eerste als de derde kolom bevatten een spilelement. De tweede rij is enkel een nulrij als $m = 5$. Dan is het stelsel consistent. Als $m \neq 5$, geeft deze rij aanleiding tot een inconsistent stelsel. We kunnen dus besluiten dat

$$\begin{bmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{bmatrix} \in T(\mathbb{R}^3) \iff m = 5.$$

Als $m = 5$, dan herleidt de uitgebreide coëfficiëntenmatrix zich tot

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De oplossingenverzameling (in parametrische vectorvorm) is dan

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 - 2t \\ t \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

en deze verzameling vectoren is de gezochte verzameling. Men kan, als controle, overigens eenvoudig narekenen dat

$$T \left(\begin{bmatrix} 2 - 2t \\ t \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Vraag 3 (6 ptn)

Gebruik bladen 4 en 5 (beide zijden) om deze vraag te beantwoorden.

Gegeven de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Bepaal de dimensies van $\text{Nul}(A)$ en $\text{Row}(A)$.
- (b) Geef een basis van $\text{Row}(A)$.
- (c) Toon dat $v = [-1 \ -1 \ 0]$ een element van $\text{Row}(A)$ is. Bepaal de coördinaten van v met respect tot de basis uit deel (b).
- (d) Gegeven zij de matrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & h \end{bmatrix}$$

voor een parameter $h \in \mathbb{R}$. Bepaal alle waarden van h zodat de dimensie van $\text{Nul}(B)$ gelijk is aan 1.

Om de dimensie van $\text{Nul}(A)$ en $\text{Row}(A)$ te bepalen, volstaat het om via elementaire rij-operaties de matrix te reduceren tot een rij-echelonvorm.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pivot}$$

Er zijn dus twee spilkolommen, en één vrije veranderlijke, dus $\dim \text{Col}(A) = 2$ en $\dim \text{Nul}(A) = 1$. Er blijven 2 niet-nul rijen over, dus $\dim \text{Row}(A) = 2$. Een basis voor $\text{Row}(A)$ is $\mathcal{B} = \{[1 \ 0 \ 1], [0 \ 1 \ -1]\}$.

Om te bepalen of $\vec{v} = [-1 \ -1 \ 0] \in \text{Row}(A)$ volstaat het om te bepalen of er een lineaire combinatie bestaat, dus gewichten x en y , zodat

$$\vec{x} = x [1 \ 0 \ 1] + y [0 \ 1 \ -1] .$$

Dit is gelijkwaardig met het bepalen of er een oplossing bestaat van het stelsel

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Het is duidelijk dat $x = -1$ en $y = -1$ de unieke oplossing is van het stelsel, hetgeen ook meteen de coördinaten oplevert ten opzichte van $\mathcal{B}$,

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

We beschouwen nu de matrix B . Elementaire rij-operaties leveren nu

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h-2 \end{bmatrix}.$$

De eerste twee kolommen zijn spilkolommen. Er is precies één vrije veranderlijke als en slechts als $h - 2 = 0$, dus $\dim \text{Nul}(A) = 1 \iff h = 2$.

Vraag 4 (5 ptn)

Gebruik bladen 6 en 7 (beide zijden) om deze vraag te beantwoorden.

Beschouw de volgende matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bepaal dan de matrix A^{10} aan de hand van het volgende stappenplan:

- Zoek de eigenwaarde(n) van A .
- Ga na dat A diagonaliseerbaar is. Leg uit waarom dit het geval is.
- Schrijf $A = PDP^{-1}$, waarbij P een matrix en D een diagonaalmatrix is. Gebruik dit om A^{10} te bepalen.

Om de eigenwaarden te bepalen, berekenen we eerste de karakteristieke veelterm van de matrix A . Dit is

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}(-1-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Dus

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (-1-\lambda)((-3-\lambda)(3-\lambda) + 8) \\ &= (-1-\lambda)(-9 + \lambda^2 + 8) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat de vergelijking $P_A(\lambda) = 0$ twee verschillende oplossingen heeft, $\lambda_1 = -1$ (met multipliciteit 2) en $\lambda_2 = 1$ (met multipliciteit 1). Dit zijn dus de eigenwaarden van de matrix A .

We bepalen nu bijhorende eigenruimten.

- De eigenruimte $E_{\lambda_1} = \text{Nul}(A - \lambda_1 I)$. Via elementaire rij-operaties kunnen we een basis voor E_{λ_1} bepalen.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dus } E_{\lambda_1} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

2. De eigenruimte $E_{\lambda_2} = \text{Nul}(A - \lambda_2 I)$.

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dus } E_{\lambda_2} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

We vinden dat $\dim E_{\lambda_1} = 2$, hetgeen gelijk is aan de multipliciteit van λ_1 . Aangezien de multipliciteit van λ_2 gelijk is aan 1, is ook $\dim E_{\lambda_2} = 1$. Er bestaat dus een basis van eigenvectoren, dus de matrix A is diagonaliseerbaar. We vonden reeds drie verschillende eigenwaarden voor de matrix A , we weten dus zeker dat de matrix diagonaliseerbaar is. Tenslotte geldt met

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dat $A = PDP^{-1}$.

$$\text{Omdat } D^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3, \text{ geldt}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3.$$