

Academiejaar 2020-2021, 1ste zitting, 17 juni 2021
Faculteit Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen

**Bachelor Biologie, Chemie, Computerwetenschappen, Computerwetenschappen (schakel-
en verkort programma), Geografie**

NAAM:
ROLNUMMER:
RICHTING:

Kruis aan indien je een vrijstelling hebt voor het onderdeel **calculus**:

☐

Schrijf je oplossingen duidelijk leesbaar op met alle tussenstappen en **volledige uitwerking**. Zorg dat je **werkwijze duidelijk** is. Rekenmachine is **niet** toegelaten. We wensen je veel succes met het examen!

Vraag 1 (4 ptn)

Vul W (waar) of V (vals, niet waar) in op de daartoe voorziene plaats: _____.

Giscorrectie: juist antwoord: +2 punten, geen antwoord: 0 punten, fout antwoord: -1 punt. Dit levert een score op 8, die nadien herschaald wordt naar een score op 4. Een negatieve score op 8 is mogelijk, maar wordt automatisch herleid naar een 0 op 4 voor deze vraag.

Vul in met waar (W) of vals (V).

- 1 W Als het systeem $A\vec{x} = \vec{b}$ juist 1 oplossing heeft, dan heeft het systeem $A\vec{x} = \vec{0}$ enkel de nuloplossing.
- 2 V Een 4×4 matrix waarvan de kolomruimte 4-dimensionaal is, heeft determinant 0.
- 3 W Stel A is een 3×3 matrix met twee verschillende eigenwaarden, namelijk 1 en 2. Dan is zijn determinant 2 of 4.
- 4 W Als $\det(A^2) = 1$, dan is $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

NAAM EN VOORNAAM:

Vraag 2 (5 ptn)

Gebruik bladen 2 en 3 (beide zijden) om deze vraag te beantwoorden.

Gegeven de lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 3x_1 + hx_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

met $h \in \mathbb{R}$ een parameter. Voor welke waarde(n) van h behoort de vector $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tot $\text{Im}(T)$?

Gelet op

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & h & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

moeten we dus bepalen voor welke waarde(n) van de parameter h de matrixvergelijking

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

minstens één oplossing heeft. We passen achtereenvolgens enkele elementaire rij-operaties toe op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & h & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & h+6 & -2 & -11 \\ 0 & 7 & -1 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{13}{7} \\ 0 & h+6 & -2 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{13}{7} \\ 0 & 0 & \frac{h-8}{7} & \frac{1+13h}{7} \end{bmatrix}$$

Zowel de eerste als de tweede kolom bevatten een spilelement. De derde kolom bevat een spilelement als en slechts als $\frac{h-8}{7} \neq 0$, dus als en slechts als $h \neq 8$. We kunnen reeds besluiten dat de matrixvergelijking een unieke oplossing heeft als en slechts als $h \neq 8$. We onderzoeken nog het geval $h = 8$. In dat geval zien we dat derde rij van de matrix gelijk is aan

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix},$$

en dus heeft de matrixvergelijking geen oplossingen. We besluiten dat

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Im}(T) \iff h \neq 8.$$

Vraag 3 (6 ptn)

Gebruik bladen 4 en 5 (beide zijden) om deze vraag te beantwoorden.

Gegeven de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Bepaal de dimensies van $\text{Nul}(A)$ en $\text{Col}(A)$.

(b) Geef een basis van $\text{Col}(A)$.

(c) Toon dat $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ een element van $\text{Col}(A)$ is. Bepaal de coördinaten van v ten opzichte van de basis uit deel (b).

(d) Gegeven de matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & h \end{bmatrix}$$

voor een parameter $h \in \mathbb{R}$. Bepaal alle waarden van h zodat de rang van B gelijk is aan 3.

Om de dimensie van $\text{Nul}(A)$ en $\text{Col}(A)$ te bepalen, volstaat het om via elementaire rij-operaties het aantal spilkolommen van A te bepalen.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Er zijn dus twee spilkolommen, dus $\dim \text{Col}(A) = 2$ en $\dim \text{Nul}(A) = 4 - \dim \text{Col}(A) = 2$. Omdat de eerste en de tweede kolom de spilkolommen zijn, vormen de eerste twee kolommen

van A een basis voor $\text{Col}(A)$. We noteren deze basis als $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Om te bepalen of

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in \text{Col}(A)$, volstaat het om de matrixvergelijking $C\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ op te lossen, met

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Elementaire rij-operaties op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix levert

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De matrixvergelijking heeft dus een unieke oplossing, $\vec{v} \in \text{Col}(A)$, en $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

De gegeven matrix B is een 3×4 matrix, dus heeft rang 3 als en slechts als hij 3 spilkolommen heeft. Via elementaire rij-operaties kunnen we deze spilkolommen bepalen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & h+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \end{bmatrix}$$

Het is duidelijk dat er drie spilelementen zijn als en slechts als $h - 2 \neq 0$, dus de rang van B is gelijk aan 3 als en slechts als $h \neq 2$.

Vraag 4 (5 ptn)

Gebruik bladen 6 en 7 (beide zijden) om deze vraag te beantwoorden.

Beschouw de volgende matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a). Ga na dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde is van A .
- (b). Zoek de andere eigenwaarde(n) van A . Indien deze niet bestaan, leg uit waarom.
- (c). Is de matrix A diagonaliseerbaar. Zo ja, zoek de diagonaalmatrix D en een matrix P zodat $A = PDP^{-1}$. Zo nee, leg uit waarom.

Om de eigenwaarden te bepalen, berekenen we eerste de karakteristieke veelterm van de matrix A . Dit is

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 3-\lambda \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Dus

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) - 3(3(3-\lambda) - 6) + 3(6 - 3(3-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 4) + 6(6 - 3(3-\lambda)) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) + 18(\lambda - 1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 5) + 18(\lambda - 1) \\ &= (\lambda - 1)((2-\lambda)(\lambda - 5) + 18) \\ &= (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 7\lambda - 10 + 18) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 8) \end{aligned}$$

Het is duidelijk dat de vergelijking $P_A(\lambda) = 0$ drie verschillende oplossingen heeft, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ en $\lambda_3 = 8$. Dit zijn dus de eigenwaarden van de matrix A .

We bepalen nu bijhorende eigenruimten.

1. De eigenruimte $E_{\lambda_1} = \text{Nul}(A - \lambda_1 I)$. Via elementaire rij-operaties kunnen we een basis voor E_{λ_1} bepalen.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -7 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dus } E_{\lambda_1} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

2. De eigenruimte $E_{\lambda_2} = \text{Nul}(A - \lambda_2 I)$.

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dus } E_{\lambda_2} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

3. De eigenruimte $E_{\lambda_3} = \text{Nul}(A - \lambda_3 I)$.

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{-7}{2} & \frac{2}{2} \\ 0 & \frac{2}{2} & \frac{-7}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Dus } E_{\lambda_3} = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

We vonden reeds drie verschillende eigenwaarden voor de matrix A , we weten dus zeker dat de matrix diagonaliseerbaar is. Tenslotte geldt met

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

dat $A = PDP^{-1}$.