



VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

Examen Lineaire Algebra

Academiejaar 2017- 2018, 2de zittijd
Faculteit Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen

Bachelor Biologie
Bachelor Chemie
Bachelor Computerwetenschappen
Bachelor Computerwetenschappen, verkort programma
Bachelor Geografie

NAAM:
ROLNUMMER:
RICHTING:

Kruis aan indien je een vrijstelling hebt voor het onderdeel **calculus**:

☐

Vul je antwoorden in op deze formulieren en zorg dat het eindresultaat duidelijk en leesbaar is. Laat deze bundel vastgeniet en **vul je naam, rolnummer en richting in op het eerste blad**.

Schrijf je oplossingen duidelijk leesbaar op met alle tussenstappen en **volledige uitwerking**. Vermeld gebruikte eigenschappen en stellingen. Zorg dat je **werkwijze duidelijk** is. Rekenmachine is **niet** toegelaten.

We wensen je veel succes met het examen!

Vraag 1 (4 ptn)

Vul in met waar (W) of vals (V).

giscorrectie: juist antwoord: +2 punten, geen antwoord: 0 punten, fout antwoord: -1 punt. Dit levert een score op 16, die nadien herschaald wordt naar een score op 4. Een negatieve score op 16 is mogelijk, maar wordt automatisch herleid naar een 0 op 4 voor deze vraag.

- 1 _____ Een 2×2 matrix met eigenwaarden -1 en 1 is diagonaliseerbaar.
- 2 _____ Stel A en B zijn beide 3×3 matrices. Als AB de eenheidsmatrix is, dan zijn zowel A als B inverteerbaar.
- 3 _____ Een diagonaliseerbare matrix heeft nooit 0 als eigenwaarde.
- 4 _____ Als de matrix A inverteerbaar is, dan is de geadjungeerde matrix ook inverteerbaar.
- 5 _____ Stel dat A een 3×3 matrix is. De dimensie van $\text{col}(A)$ is gelijk aan de dimensie van $\text{row}(A)$.
- 6 _____ Zij V een vectorruimte. Als er geen lineair onafhankelijke verzameling $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ van p verschillende vectoren bestaat, dan is $\dim V \leq p$.
- 7 _____ Stel A is een inverteerbare 3×3 matrix. Dan is de dimensie van de kolomruimte van A gelijk aan 3.
- 8 _____ De dimensie van de rijruimte van een 7×4 matrix kan gelijk aan 7 zijn.

Vraag 2 (5 ptn)

1. Beschouw het volgende lineaire stelsel in x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} -9x_1 - 2x_2 + hx_3 &= 3 \\ 9x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= -21 \\ 9x_1 - 4x_2 - 1x_3 &= 15 \end{cases}$$

(a) Voor welke $h \in \mathbb{R}$ heeft dit stelsel:

- i. een unieke oplossing?
- ii. oneindig veel oplossingen?
- iii. geen oplossingen?

(b) Geef bij puntjes (i) en (ii) ook de oplossing(en), indien ze bestaan.

2. Gegeven de vectoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

beschouw dan de lineaire transformatie

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \mapsto x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2.$$

(a) Bepaal de matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zodat $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

(b) Is T injectief, surjectief of (geen van) beide?

Vraag 3 (3 ptn)

1. Vind een $\alpha \in \mathbb{R}$ zodat $\det(\alpha A^9) = 1$, waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Stel dat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een inverteerbare matrix is en $\det(A) = 1$. Toon aan dat de determinant van de geadjugeerde matrix van A gelijk is aan 1.

Vraag 4 (5 ptn)

a) Beschouw volgende matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wat is de dimensie van $\text{Nul}A$, $\text{Col}A$ en $\text{Row}A$? Geef ook telkens een basis voor deze vectorruimten.

b) Ga na dat

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

een basis vormt voor $\mathbb{R}^3$.

c) De coördinaten van de vector $\mathbf{x}$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ worden gegeven door

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal $\mathbf{x}$.

d) Toon aan dat volgende verzameling een deelruimte is van $\mathbb{P}_2$:

$$H = \{\mathbf{p}(t) \in \mathbb{P}_2 \mid \mathbf{p}(0) = 0, \mathbf{p}(1) = 0\}.$$

Geef een basis voor deze vectorruimte.

Vraag 5 (3 ptn)

1. Is de matrix C diagonaliseerbaar?

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Bepaal matrices P en D zodat PDP^{-1} een diagonalisatie is van E .

$$E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

