



VRIJE
UNIVERSITEIT
BRUSSEL

Examen Lineaire Algebra

Academiejaar 2016- 2017, 1ste zittijd
Faculteit Wetenschappen en Bio-ingenieurswetenschappen

Bachelor Biologie
Bachelor Chemie
Bachelor Computerwetenschappen
Bachelor Computerwetenschappen, verkort programma
Bachelor Geografie

NAAM: Lisa
ROLNUMMER: 0614940
RICHTING: A-I

Vul je antwoorden in op deze formulieren en zorg dat het eindresultaat duidelijk en leesbaar is. Laat deze bundel vastgeniet en **vul je naam, rolnummer en richting in op het eerste blad.**

Schrijf je oplossingen duidelijk leesbaar op met alle tussenstappen en **volledige uitwerking**. Vermeld gebruikte eigenschappen en stellingen. Zorg dat je **werkwijze duidelijk** is. Rekenmachine is **niet** toegelaten.

We wensen je veel succes met het examen!

Vraag 1 (4 ptn)

giscorrectie: juist antwoord: +1 punt, geen antwoord: 0 punten, fout antwoord: $-\frac{1}{2}$ punt. Dit levert een score op 10, die nadien herschaald wordt naar een score op 4.

Vul in met waar (W) of vals (V).

- 1 V Elke matrix die diagonaliseerbaar is, is inverteerbaar
- 2 W Men kan niet besluiten dat een 4×4 matrix met vier verschillende eigenwaarden diagonaliseerbaar is, tenzij men deze vier eigenwaarden kent.
- 3 V Het product van vijf inverteerbare matrices is zeker inverteerbaar.
- 4 V Stel dat A een 3×3 matrix is. Dan is A inverteerbaar als geen enkele van de eigenwaarden nul is.
- 5 V Stel dat A en B $n \times n$ matrices zijn. Als $AB = O$ (O is de $n \times n$ nulmatrix), dan zijn noch A noch B inverteerbaar.
- 6 W In een 3-dimensionale vectorruimte zijn elke drie vectoren lineair onafhankelijk.
- 7 V Stel A is een 4×7 matrix. Het is mogelijk dat de dimensie van de kolomruimte 5 is.
- 8 V Stel A is een 6×3 matrix. Dan is de dimensie van de rijruimte van A hoogstens 3.
- 9 ? Stel dat $\vec{x}$ en $\vec{y}$ twee lineair onafhankelijke vectoren uit een vectorruimte V zijn. Dan zijn $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{x} + \vec{y}$ drie lineair onafhankelijke vectoren.
- 10 W De rang van een 3×5 matrix kan gelijk zijn aan 2.

Vraag 2 (5 ptn)

1. Beschouw het volgende lineaire stelsel in x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 7x_2 + hx_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Voor welke waarden van $h \in \mathbb{R}$ heeft het stelsel

- (i) een unieke oplossing?
- (ii) oneindig veel oplossingen?
- (iii) geen oplossing?

(b) In het geval dat ze bestaan, geef dan de oplossing(en) bij puntjes (i) en (ii) uit het eerste deel van de vraag.

2. Gegeven de vectoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix},$$

beschouw dan de lineaire transformatie

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{x} \mapsto x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2.$$

(a) Bepaal de matrix A zodat $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

(b) Is T injectief, surjectief of (geen van) beide? Leg uit.

Vraag 3 (3 ptn)

1. Bereken de determinant van A^{10} , waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 2 & -7 & 8 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2. Wat is de determinant van een 3×3 matrix A als $A^T = -A$ (A^T is de getransponeerde van A)?

Vraag 4 (5 ptn)

- (a) Wat is de dimensie van de Nul- en kolomruimte van de matrix A ? Geef ook telkens een basis.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Toon aan dat volgende verzameling een deelruimte is van $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid A = A^T \right\}.$$

- (c) Toon aan dat $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ een basis is van H .

- (d) Wat zijn de coördinaten van $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ten opzichte van $\mathcal{B}$? Verklaar je antwoord.

Vraag 5 (3 ptn)

1. (a) Is de matrix B diagonaliseerbaar?

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

- (b) Bereken matrices P en D zodat $C = PDP^{-1}$ een diagonalisatie is van C .

$$C := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

