

Wiskunde:

Calculus en
Lineaire Algebra

Te kennen bewijzen
van
Calculus
2de semester

Fiebe Lodewijckx

1^{ste} BA Geografie

Wetenschappen & Bio-ingenieurschappen

2021-2022



Hoofdstuk

Aanvullingen Integralen

Boglengte en oneigenlijke integralen

Convergentie van $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}$

Voor welke waarden van p convergeert de integraal $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ en welke waarde heeft deze dan?

* Als $p > 1$ dan hoe groter x , hoe kleiner het getal.

* Als $p \neq 1$

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \frac{1}{p} (b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right)$$

$$\text{Dus } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{als } p > 1 \\ \infty & \text{als } p < 1 \end{cases}$$

$$\text{want } \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0 & \text{als } p > 1 \rightarrow \text{convergeert} \\ \infty & \text{als } p < 1 \rightarrow \text{divergeert} \end{cases}$$

* Als $p = 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(x) \Big|_1^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln(b) - \ln(1))$$

$$= \infty \rightarrow \text{divergeert}$$



Hoofdstuk Rijen

Gevolg Sandwich - Theorema

Het Sandwich theorema

Zij $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ en $\{c_n\}$ drie rijen en zij $a_n \leq b_n \leq c_n$ vanaf een bepaalde index N .

Indien $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ dan geldt ook dat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

Gevolg

Als $|b_n| \leq c_n$ en de rij c_n convergeert naar 0 dan convergeert b_n ook naar 0.

$|b_n| \leq c_n$ en c_n convergeert naar 0

$$-c_n \leq b_n \leq c_n$$

$\downarrow$
0

$\downarrow$
0

$\Rightarrow b_n$ convergeert ook naar 0

Convergeren van limieten

De reeksen convergeren naar onderstaande limieten

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Dus $\frac{\ln(x)}{x} \rightarrow 0$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n}$ via $\ln$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} x \quad (\text{met } x > 0) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = e^0 = 1$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x}$ via $\ln$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = e^0 = 1$



Hoofdstuk

Reeksen 1

Telescopische reeks

Telescopische reeks

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{convergeert naar 1}$$

$$* \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \quad (= \frac{n+1-n}{n(n+1)})$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$$

$$* \begin{aligned} \text{1ste term} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$* \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{k+1} = 1$$

$$\Rightarrow \{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\} = 1$$

$\Rightarrow$ telescopische reeks convergeert naar 1

Convergeren naar 0

Stelling

Indien de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan convergeert de rij $\{a_n\}$ naar nul : $a_n \rightarrow 0$

Indien de limiet van de rij $\{a_n\}$ niet bestaat of verschillend van nul is divergeert de reeks

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$s_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}$$

$$s_n = s_{n-1} + a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\Rightarrow \sum a_n = L \text{ convergeert} \Rightarrow s_n \rightarrow L$$



Meetkundige Reeks

Meetkundige reeks:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Convergeert naar $\frac{a}{1-r}$ als $|r| < 1$ en divergeert als $|r| \geq 1$

* $r = 1$

$r = \text{rede}$

$$\rightarrow a + a + a + \dots$$

$$\rightarrow s_n = n \cdot a$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$$

$\rightarrow$ Reeks divergeert want $\{s_n\}$ divergeert

* $r = -1$

$$\rightarrow a - a + a - a + a \dots$$

$$\rightarrow s_{2n} = 0 \text{ en } s_{2n+1} = a$$

$\rightarrow$ Reeks divergeert want $\{s_n\}$ divergeert

* $r \neq 1$

$$\rightarrow s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$$

$$- r \cdot s_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$s_n - r \cdot s_n = a - ar^n$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\bullet |r| < 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \sum a_n$$

$$\bullet |r| > 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \text{ divergeert}$$

$$\Rightarrow \{s_n\} \text{ divergeert}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ divergeert}$$



Rij der Partieelsommen

Zij $\{a_n\}$ een rij van positieve termen en veronderstel dat $a_n = f(n)$ waarbij f een positieve, dalende continue functie is voor $x > N$ ($N > 0$), dan zullen de reeks en de integraal $\int_N^{\infty} f(x) dx$ ofwel beiden convergeren ofwel beiden divergeren.

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

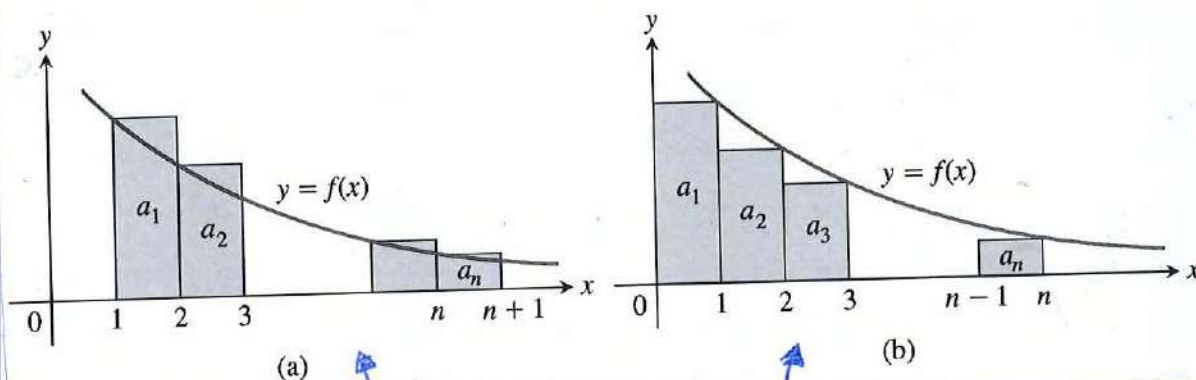
$$s_{n+1} > s_n$$

Integraaltest

1. Theorema

Een positieve reeks $\sum a_n$ convergeert $\leftrightarrow$ de rij der partieelsommen is naar boven begrensd

Bewijs: rij der partieelsommen is stijgend



$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \quad \bigg| \quad \int_1^n f(x) dx \geq a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\Rightarrow \int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx$$

geldt $\forall n$ ook $\lim_{n \rightarrow \infty}$

① als $\int_1^{\infty} f(x) dx$ convergeert

uit $\circ \Rightarrow \sum a_n$ convergeert bovengrens

② als $\int_1^{\infty} f(x) dx$ divergent

uit $\square \Rightarrow \{s_n\}$ niet begrensd

$\Rightarrow \sum a_n$ divergent



P-Reeks

EXAMPLE 3 The p -Series

Show that the p -series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

(p a real constant) converges if $p > 1$, and diverges if $p \leq 1$.

Gezien dat bij $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$

convergeert als $p > 1$ (zie bewijs P2)

divergeert als $p \leq 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ is hetzelfde

De directe vergelijkingstest

Zij $\sum a_n$ een reeks met positieve termen, dan geldt

i) Als er een convergente reeks $\sum c_n$ bestaat met $a_n \leq c_n$ voor alle $n > N$

(N een geheel getal) dan convergeert $\sum a_n$

ii) Als er een **positieve** divergente reeks $\sum d_n$ bestaat met $d_n \leq a_n$ voor alle $n > N$

(N een geheel getal) dan divergeert $\sum a_n$

i) Reeks met $\oplus$ termen convergeert als Rg der partieelsommen naar boven begrensd

$$s_n = a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_n$$

$$\leq a_1 + \dots + a_n + c_{n+1} + \dots + c_n$$

$$\leq a_1 + \dots + a_n + \sum c_n \text{ bovengrens}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ convergeert}$$

ii) moet bewijzen dat $\sum a_n$ divergent Probeer uit het ongerijmde
 Stel $\sum a_n$ is convergent $\Rightarrow$ uit i) $\sum d_n$ is convergent
 $\Rightarrow$ tegenspraak $\Rightarrow \sum a_n$ is divergent



Hoofdstuk

Reeksen 2 (alternerende)

Alternerende reeksen

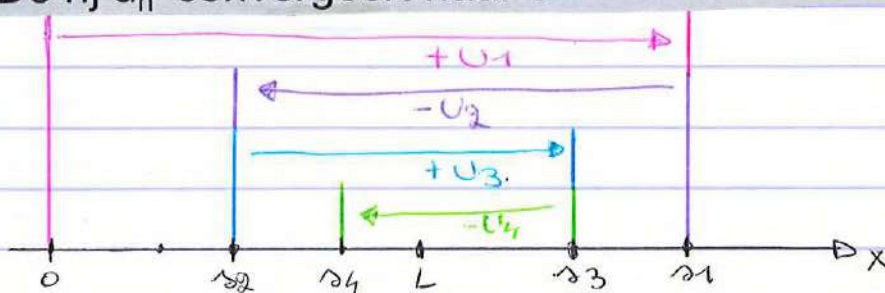
= een reeks met termen die telkens van teken wisselen

Theorema van Leibniz

De reeks $\sum (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$

convergeert als aan de 3 volgende voorwaarden is voldaan:

1. De termen u_n zijn allen positief
2. $u_n \geq u_{n+1}$ vanaf een bepaalde $n=N$
3. De rij u_n convergeert naar 0



$$s_1 = u_1$$

$$s_2 = u_1 - u_2$$

$$s_3 = s_2 + u_3$$

$$= s_1 - u_2$$

even
partieel
sommen

$\{s_{2n}\}$ convergent

$$s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

$\rightarrow \{s_{2n}\}$ Rij met $\oplus$ termen

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{(u_{2n+1} - u_{2n+2})}_{\geq 0}$$

$$\geq s_{2n}$$

$\Rightarrow \{s_{2n}\}$ stijgende rij (nr boven begrensd?)

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) \dots - u_{2n}$$

$$\geq u_1$$

$\Rightarrow \{s_{2n}\}$ is naar boven begrensd

$\Rightarrow$ 1) uit $\square$ en $\bigcirc \exists L \in \mathbb{R} \{s_{2n}\} \rightarrow L$

$$2) s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\downarrow$$

$$\Rightarrow \{s_{2n+1}\} \rightarrow L$$

$\Rightarrow$ uit 1) en 2) $\{s_n\} \rightarrow L \Rightarrow$ reeks convergeert



Hoofdstuk

Reeksen 4: Taylorreeks

Afleiding van de coëfficiënten van een Taylorreeks

Wij beperken ons tot de **Taylorreeksen**

$f(x)$ schrijven als $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots ??$

Indien dit mogelijk is dus indien:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

wat zijn dan de coëfficiënten c_i ?

Berekenen door functiewaarde en de afgeleiden van f te berekenen in a

$$\# f(a) = c_0 = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}$$

$$\# f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$
$$f'(a) = c_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

$$\# f''(x) = 2c_2 + 3(2)c_3(x-a) + 4(3)c_4(x-a)^2 + \dots$$
$$f''(a) = 2c_2$$
$$\Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2} = \frac{f^{(2)}(a)}{2!}$$

$$\# f'''(x) = 3(2)c_3 + 4(3)(2)c_4(x-a) + \dots$$
$$f'''(a) = 3(2)c_3$$
$$\Rightarrow c_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot (2)} = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

$$\# \text{Algemeen:}$$
$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$\# \text{Taylorreeks:}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

