

6.3 Booglengte

Indien een curve C beschreven wordt door de parametervergelijking $x = f(t)$, $y = g(t)$, met f' en g' continue functies van t , die niet tegelijk 0 zijn op het interval $[a, b]$, en indien C slechts één keer doorlopen wordt als t stijgt van a naar b , dan wordt de booglengte van C gegeven door:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad a \leq t \leq b$$

Formula for the Length of $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

If f is continuously differentiable on the closed interval $[a, b]$, the length of the curve (graph) $y = f(x)$ from $x = a$ to $x = b$ is

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (2)$$

Formula for the Length of $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$

If g is continuously differentiable on $[c, d]$, the length of the curve $x = g(y)$ from $y = c$ to $y = d$ is

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy. \quad (3)$$

8.1 Integratie Formules

- | | |
|--|---|
| 1. $\int du = u + C$ | 14. $\int e^u du = e^u + C$ |
| 2. $\int k du = ku + C$ (any number k) | 15. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$) |
| 3. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$ | 18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ |
| 4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$) | 19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ |
| 5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | |
| 6. $\int \sin u du = -\cos u + C$ | |
| 7. $\int \cos u du = \sin u + C$ | |
| 8. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$ | |
| 9. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$ | |

8.8 Oneigenlijke Integratie

DEFINITION Type I Improper Integrals

Integrals with infinite limits of integration are **improper integrals of Type I**.

1. If $f(x)$ is continuous on $[a, \infty)$, then

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

2. If $f(x)$ is continuous on $(-\infty, b]$, then

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

3. If $f(x)$ is continuous on $(-\infty, \infty)$, then

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx,$$

where c is any real number.

Indien de limiet eindig is zeggen we dat de oneigenlijke integraal convergeert.
Indien de limiet niet bestaat zeggen we dat de oneigenlijke integraal divergeert

EXAMPLE 3 Determining Convergence

For what values of p does the integral $\int_1^\infty dx/x^p$ converge? When the integral does converge, what is its value?

Solution If $p \neq 1$,

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b = \frac{1}{1-p} (b^{-p+1} - 1) = \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right).$$

Thus,

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) \right] = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

because

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \begin{cases} 0, & p > 1 \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$$

Therefore, the integral converges to the value $1/(p-1)$ if $p > 1$ and it diverges if $p < 1$.

If $p = 1$, the integral also diverges:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} &= \int_1^\infty \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty. \end{aligned}$$

DEFINITION Type II Improper Integrals

Integrals of functions that become infinite at a point within the interval of integration are **improper integrals of Type II**.

1. If $f(x)$ is continuous on $(a, b]$ and is discontinuous at a then

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

2. If $f(x)$ is continuous on $[a, b)$ and is discontinuous at b , then

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

3. If $f(x)$ is discontinuous at c , where $a < c < b$, and continuous on $[a, c) \cup (c, b]$, then

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Indien de limiet eindig is zeggen we dat de oneigenlijke integraal convergeert.
Indien de limiet niet bestaat zeggen we dat de oneigenlijke integraal divergeert

THEOREM 1 Direct Comparison Test

Let f and g be continuous on $[a, \infty)$ with $0 \leq f(x) \leq g(x)$ for all $x \geq a$. Then

1. $\int_a^\infty f(x) dx$ converges $\leftarrow \int_a^\infty g(x) dx$ converges
2. $\int_a^\infty g(x) dx$ diverges $\leftarrow \int_a^\infty f(x) dx$ diverges.

THEOREM 2 Limit Comparison Test

If the positive functions f and g are continuous on $[a, \infty)$ and if

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \quad 0 < L < \infty,$$

then

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad \text{and} \quad \int_a^\infty g(x) dx$$

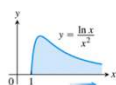
both converge or both diverge.

Types of Improper Integrals Discussed in This Section

INFINITE LIMITS OF INTEGRATION: **TYPE I**

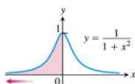
1. Upper limit

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx$$



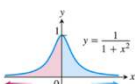
2. Lower limit

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2}$$



3. Both limits

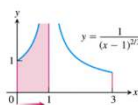
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2}$$



INTEGRAND BECOMES INFINITE: **TYPE II**

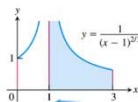
4. Upper endpoint

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



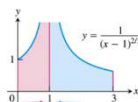
5. Lower endpoint

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{d \rightarrow 1^+} \int_d^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



6. Interior point

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$



11.1 Rijen

Definitie van een oneindige rij

Een oneindige rij getallen is een functie, die als domein de gehele getallen heeft groter of gelijk aan een geheel getal n_0 .

Notatie:

functie a $a(n) = n^2$ ofwel $a_n = n^2$

We noemen $a_n = n^2$ het **voorschrift** van de rij en n de index

De rij zelf noteren we als $\{a_n\}$ of $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bv: $\{a_n\} = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$

Definitie

De rij $\{a_n\}$ convergeert naar L indien:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ zodat } \forall n > N \text{ geldt } |a_n - L| < \varepsilon$$

We schrijven: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ of $a_n \rightarrow L$

Indien er zo geen getal L bestaat zeggen we dat de rij **divergeert**.

Definitie van divergentie naar oneindig

De rij $\{a_n\}$ divergeert naar oneindig indien:

$$\forall M > 0, \exists N > 0 \text{ zodat } \forall n > N \text{ geldt } a_n > M$$

We schrijven: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ of $a_n \rightarrow \infty$

De rij $\{a_n\}$ divergeert naar min oneindig indien:

$$\forall m < 0, \exists N > 0 \text{ zodat } \forall n > N \text{ geldt } a_n < m$$

We schrijven: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ of $a_n \rightarrow -\infty$

THEOREM 1

Let $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ be sequences of real numbers and let A and B be real numbers. The following rules hold if $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$.

1. *Sum Rule:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
2. *Difference Rule:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$
3. *Product Rule:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
4. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot b_n) = k \cdot B$ (Any number k)
5. *Quotient Rule:* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ if $B \neq 0$

Het Sandwich theorema

Zij $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ en $\{c_n\}$ drie rijen en zij $a_n \leq b_n \leq c_n$ vanaf een bepaalde index N .

Indien $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ dan geldt ook dat $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

Gevolg

Als $|b_n| \leq c_n$ en de rij c_n convergeert naar 0 dan convergeert b_n ook naar 0.

Het continue functie theorema

Zij $\{a_n\}$ een rij reële getallen. Als $a_n \rightarrow L$ en indien f een functie is, die continu is in L en gedefinieerd voor alle waarden van a_n dan zal $f(a_n) \rightarrow f(L)$

Theorema (ivm l'Hôpital)

Zij f een functie die gedefinieerd is voor alle waarden $x \geq n_0$ en zij een rij gedefinieerd als $a_n = f(n)$ voor $n \geq n_0$ dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

BEWIJS : Theorema (ivm l'Hôpital)

Suppose that $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. Then for each positive number ϵ there is a number M such that for all x :

$$x > M \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

THEOREM 5

The following six sequences converge to the limits listed below:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (\text{any } x)$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\text{any } x)$

In Formulas (3) through (6), x remains fixed as $n \rightarrow \infty$.

BEWIJS

$$\begin{aligned}
 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\infty}{\infty}}{\frac{1}{1}} = 0 \quad \text{DVS} \quad \frac{\ln(n)}{n} = 0 \\
 2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x})^{1/x} &\quad \text{via } \ln: \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x) = 0 \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = e^0 = 1 \\
 3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} &\quad \text{via } \ln: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} x \quad (\text{met } x > 0) = 0 \\
 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

Recursieve definities

Soms worden rijen recursief gedefinieerd, bijvoorbeeld:

$$a_1 = 1 \text{ en } a_n = a_{n-1} + 1; \text{ Fibonacci: } a_1 = a_2 = 1 \text{ en } a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$$

Om de rij volledig te kennen heb je de beginterm nodig en de recursieformule.

Monotone rijen, stijgende en dalende rijen

Definitie

Een rij $\{a_n\}$, waarvoor geldt dat $a_n \leq a_{n+1}$ voor alle waarden van n heet **stijgend**.

Een rij $\{a_n\}$, waarvoor geldt dat $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle waarden van n heet **dalend**.

Een **monotone** rij is een dalende of stijgende rij

Definitie

Een rij $\{a_n\}$ is **naar boven begrensd** indien er een getal M bestaat zodat $a_n \leq M$ voor alle n . We noemen M dan een bovengrens van $\{a_n\}$.

Een rij $\{a_n\}$ is **naar onder begrensd** indien er een getal m bestaat zodat $a_n \geq m$ voor alle n . We noemen m dan een ondergrens van $\{a_n\}$.

Een rij die zowel naar boven als beneden begrensd is noemen we een **begrensd** rij.

Theorema

Een stijgende rij convergeert dan en slechts dan als ze naar boven begrensd is. De rij convergeert dan naar haar kleinste bovengrens

Een dalende rij convergeert dan en slechts dan als ze naar onder begrensd is. De rij convergeert dan naar haar grootste ondergrens

NB: Indien de rij enkel monotoon of begrensd is zal ze niet convergeren !

11.2 Reeksen

Definitie

Gegeven een rij $\{a_n\}$ dan noemen we de volgende oneindige som **een reeks**:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad a_n \text{ heet de } n^{\text{de}} \text{ term van de reeks}$$

Definitie

We definiëren de **n^{de} partiëlesom** als:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Definitie van convergentie van een reeks

We zeggen dat een **reeks** convergeert met som L indien de **rij der partiëleommen** convergeert naar L . We schrijven:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Zoniet divergeert de reeks.

Telescopische reeks

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{convergeert naar } 1$$

Bewijs: Telescopische reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \quad s_k = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1 \Rightarrow \{s_k\} = 1$$

besluit: de telescopische reeks convergeert naar 1

Meetkundige reeks:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Convergeert naar $\frac{a}{1-r}$ als $|r| < 1$ en divergeert als $|r| \geq 1$

Bewijs: Meetkundige reeks

i) $r = 1$

$$a + a + a + \dots$$

$$s_n = na$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \Rightarrow$ reeks divergeert naar oneindig

ii) $r = -1$

$$a - a + a - a + \dots$$

$$s_{2m} = 0 \quad \text{en} \quad s_{2m+1} = a$$

$\Rightarrow \{s_n\}$ divergeert

$\Rightarrow$ reeks divergeert

iii) $|r| \neq 1$

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad (n\text{-de partieel som})$$

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$1. |r| < 1: \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \text{convergeert}$$

$$2. |r| > 1: \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \text{ is divergent} \Rightarrow \{s_n\} \text{ is divergent} \Rightarrow \sum a_n \text{ divergeert}$$

Divergente reeksen

Stelling

Indien de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert dan convergeert de rij $\{a_n\}$ naar nul: $a_n \rightarrow 0$

Indien de limiet van de rij $\{a_n\}$ niet bestaat of verschillend van nul is divergeert de reeks

Let wel het omgekeerde geldt niet

Bewijs: Divergente reeksen

$$s_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}$$

$$\Rightarrow s_n = s_{n-1} + a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\Downarrow \quad \text{en } \sum a_n \text{ convergent} \Rightarrow \sum a_n = L \Rightarrow s_n \rightarrow L$$

$$L = L + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$a_n \rightarrow 0$$

THEOREM 8

If $\sum a_n = A$ and $\sum b_n = B$ are convergent series, then

1. Sum Rule: $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$
2. Difference Rule: $\sum (a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$
3. Constant Multiple Rule: $\sum ka_n = k \sum a_n = kA$ (Any number k).

NB: Het toevoegen of verwijderen van een eindig aantal termen heeft geen effect op de convergentie evenals het herindexeren, zolang de volgorde van de termen maar wordt bewaard.

Gevolg:

1. Elk veelvoud ($\neq 0$) van een divergente reeks divergeert
2. Als $\sum a_n$ convergeert en $\sum b_n$ divergeert dan divergeren:

$$\sum (a_n + b_n)$$

$$\sum (a_n - b_n)$$

Convergentiecriteria voor positieve reeksen

1. Theorema

Een positieve reeks $\sum a_n$ convergeert $\leftrightarrow$ de rij der partielsommen is naar boven begrensd

BEWIS

$$S_{m+1} = S_m + a_{m+1} \quad \text{en} \quad a_{m+1} \geq 0 \quad (\text{positieve reeksen})$$

$$S_{m+1} \geq S_m$$

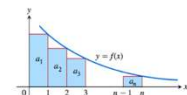
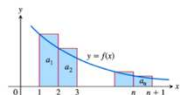
$\Rightarrow$ de rij der partielsommen is stijgend
 $\Rightarrow$ als de reeks naar boven begrensd $\Rightarrow$ Convergent

11.3 Integraaltest

Zij $\{a_n\}$ een rij van positieve termen en veronderstel dat $a_n = f(n)$ waarbij f een positieve, dalende continue functie is voor $x > N$ ($N > 0$), dan zullen de reeks en de integraal $\int_N^{\infty} f(x) dx$ ofwel beiden convergeren ofwel beiden divergeren.

BEWIS : Integraaltest

Voor $N=1$



$$\int_1^{m+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_m \quad \int_1^m f(x) dx \geq a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

$$\Rightarrow \int_1^{m+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_m \leq a_1 + \int_1^m f(x) dx$$

geldt $\forall n$: ook $\lim_{m \rightarrow \infty}$

$$1. \text{ als } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ convergeert} \Rightarrow \sum a_n \text{ convergeert}$$

$$2. \text{ of } \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ divergeert} \Rightarrow \{S_n\} \text{ niet begrensd} \Rightarrow \sum a_n \text{ divergent}$$

BEWIS : p-Series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{m^p} + \dots \quad p > 1 : \text{convergeert}$$

$$p \leq 1 : \text{divergeert}$$

If $p > 1$ then $f(x) = \frac{1}{x^p}$ is a positive decreasing function of x .

$$\text{Since } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^b \quad \begin{matrix} b^{-p+1} \rightarrow 0 \text{ as } b \rightarrow \infty \\ * \text{ because } p-1 > 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} (0-1) = \frac{1}{p-1}$$

the series converges by the Integral Test. We emphasize that the sum of the p -series is not $\frac{1}{p-1}$. The series converges, but we don't know the value it converges to.

$$\text{If } p < 1, \text{ then } 1-p > 0 \text{ and } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{1-p} - 1) = \infty$$

The series diverges by the Integral Test.

If $p=1$ we have the (divergent) harmonic series: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} + \dots$

11.4 De Vergelijkingstesten

1. De directe vergelijkingstest

Zij $\sum a_n$ een reeks met positieve termen, dan geldt

- i) Als er een convergente reeks $\sum c_n$ bestaat met $a_n \leq c_n$ voor alle $n > N$ (N een geheel getal) dan convergeert $\sum a_n$
- ii) Als er een **positieve** divergente reeks $\sum d_n$ bestaat met $d_n \leq a_n$ voor alle $n > N$ (N een geheel getal) dan divergeert $\sum a_n$

Bewijs: Directe vergelijkingstest

i) Reeks met positieve termen: convergent als de rij der partiële sommen naar boven begrensd.

$$\begin{aligned} S_m &= a_1 + \dots + a_N + a_{N+1} + \dots + a_m \\ &\leq a_1 + \dots + a_N + c_{N+1} + \dots + c_m \\ &\leq a_1 + \dots + a_N + \sum_{n=N+1}^m c_n \rightarrow \text{bovengrens van } \{S_n\} \\ &\Rightarrow \sum a_n \text{ convergent} \end{aligned}$$

ii) T.B.: $\sum a_n$ divergent

stel: $\sum a_n$ convergent $\Rightarrow \sum d_n$ convergent = tegenspraak
 $\Rightarrow \sum a_n$ divergent

2. De limiet vergelijkingstest

Zij $a_n > 0$ en $b_n > 0$ voor alle $n > N$ (met N positief geheel getal)

En zij $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ dan geldt:

- i) Indien $\infty > c > 0$ dan zullen de reeksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ beiden convergeren of divergeren
- ii) Indien $c = 0$ en $\sum b_n$ convergeert dan convergeert $\sum a_n$
- iii) Indien $c = \infty$ en $\sum b_n$ divergeert dan divergeert $\sum a_n$

11.5 De Verhoudings- en Worteltest

De verhoudingstest

Zij $\sum a_n$ een reeks met strikt positieve termen en zij $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$

Dan geldt:

- i) als $\rho < 1$ dan convergeert de reeks
- ii) als $\rho > 1$ of $\rho = \infty$ dan divergeert de reeks
- iii) als $\rho = 1$ weet je niets aangaande de al dan niet convergentie van de reeks

De worteltest

Zij $\sum a_n$ een reeks met $a_n \geq 0$ voor $n \geq N$ en veronderstel dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

dan geldt:

- i) als $\rho < 1$ convergeert de reeks
- ii) als $\rho > 1$ of $\rho = \infty$ dan divergeert de reeks
- iii) als $\rho = 1$ weet je niets aangaande de al dan niet convergentie van de reeks

11.6 Alternerende reeksen en conditionele convergentie

Alternerende reeksen

Een reeks met termen die telkens van teken wisselen.

Theorema van Leibniz

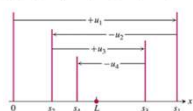
De reeks $\sum (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$

convergeert als aan de 3 volgende voorwaarden is voldaan:

1. De termen u_n zijn allen positief
2. $u_n \geq u_{n+1}$ vanaf een bepaalde $n=N$
3. De rij u_n convergeert naar 0

BEWIJS: Theorema van Leibniz

$$\sum (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$$



$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 - u_2 = S_1 + u_2$$

$$S_3 = S_2 - u_3$$

$\{S_{2n}\}$ convergent

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

* $\{u_{2m}\}$ is rij van positieve termen

$$S_{2n+2} = S_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2})$$

$$\geq S_{2n}$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - u_{2n}$$

$$\geq u_1$$

* $\{S_{2n}\}$ is een stijgende rij

* $\{S_{2n}\}$ is maar boven begrensd

① $\exists L : \{S_{2n}\} \rightarrow L$

② $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$

Mit ① : $\{S_{2n}\} \rightarrow L$ en $u_{2n+1} \rightarrow 0$

dus $\{S_{2n+1}\} \rightarrow L$

③ Mit ① en ② : $\{S_n\} \rightarrow L \Rightarrow$ reeks convergent

NB: De restterm van de n-de partiele som zal kleiner zijn dan $|u_{n+1}|$ en deze restterm zal ook het teken van deze term hebben.

Absolute en voorwaardelijke (of conditionele) convergentie**Definitie van absolute convergentie**

Een reeks $\sum a_n$ heet **absoluut** convergent indien de reeks $\sum |a_n|$ convergeert

Definitie van conditionele convergentie

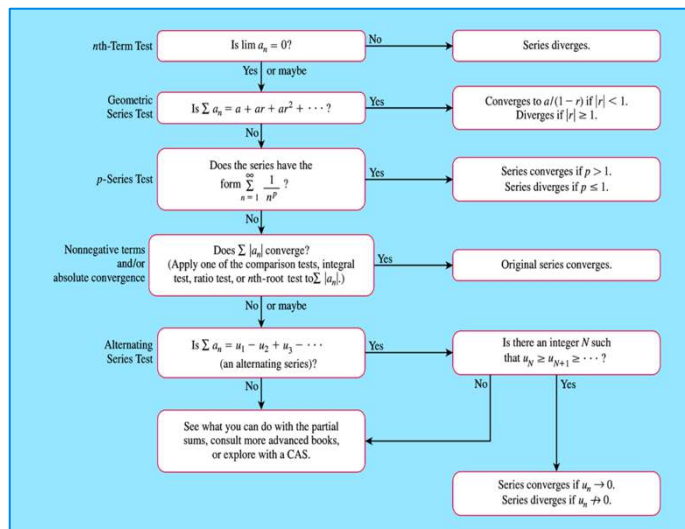
Een convergente reeks $\sum a_n$ heet **conditioneel** convergent indien de reeks niet absoluut convergeert

Theorema: De absolute convergentie test

Indien een reeks absoluut convergent is, is zij ook convergent

Theorema herschikking

Indien een reeks absoluut convergent is zal elke reeks ontstaan door een herschikking van de termen ook absoluut convergent zijn met dezelfde limiet.



1. **The n th-Term Test:** Unless $a_n \rightarrow 0$, the series diverges.
2. **Geometric series:** $\sum ar^n$ converges if $|r| < 1$; otherwise it diverges.
3. **p -series:** $\sum 1/n^p$ converges if $p > 1$; otherwise it diverges.
4. **Series with nonnegative terms:** Try the Integral Test, Ratio Test, or Root Test. Try comparing to a known series with the Comparison Test.
5. **Series with some negative terms:** Does $\sum |a_n|$ converge? If yes, so does $\sum a_n$, since absolute convergence implies convergence.
6. **Alternating series:** $\sum a_n$ converges if the series satisfies the conditions of the Alternating Series Test.

11.7 Machtreksen

Definitie

Een uitdrukking van de vorm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

noemen we een machtreks, gecentreerd rond 0. $c_0, c_1, \dots$ zijn constanten

Een uitdrukking van de vorm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots$$

is een machtreks gecentreerd rond $x=a$. De term $c_n (x-a)^n$ is de n de term en a is het centrum van de machtreks.



De machtreks convergeert voor alle punten in het rood aangeduid, niet in 1 en -1.

Bemerkt de symmetrie ten opzichte van 0, het centrum van de machtreks.

Bemerkt ook dat je links en rechts van het centrum convergentie hebt over een afstand van 1 (de blauwe pijl). We spreken van een **convergentiestraal** van 1.

Convergentietheorema van een machtreks 1

Indien de machtreks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

convergeert voor $x = c \neq 0$, dan convergeert ze absoluut voor elke x met $|x| < |c|$.

Indien de machtreks divergeert voor $x = d$, dan divergeert ze voor elke x met $|x| > |d|$.

Convergentietheorema van een machtreeks 2

Er zijn drie mogelijkheden betreffende de convergentie van de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

i) er is een positief getal R zodat de reeks absoluut convergent is voor $|x-a| < R$ en divergent voor $|x-a| > R$

De reeks convergeert of divergeert in de punten $x = a - R$ en $x = a + R$

ii) de reeks convergeert absoluut voor elke x ($R = \infty$)

iii) de reeks convergeert in haar centrum a en divergeert voor elke andere waarde van x ($R=0$)

$R =$ **convergentiestraal** ($0, \infty$ of $0 < R < \infty$)

Verzameling van alle convergentiepunten heet het **convergentieinterval**

NB: Een machtreeks is absoluut convergent in het inwendige van het convergentieinterval.

Techniek voor het bepalen van het convergentiegebied

i) bepaal de convergentiestraal met de verhoudingstest of worteltest

ii) Bepaal de convergentie in de randpunten van het interval (indien R reëel, dus niet gelijk aan nul of oneindig) met een andere test.

iii) Indien R reëel divergeert de reeks voor x met $x < a-R$ of $a+R < x$

Theorema: het afleiden term per term

Indien de machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

convergeert voor $a - R < x < a + R$

Kunnen we de volgende functie f definiëren:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad (a - R < x < a + R)$$

Deze functie is afleidbaar tot alle ordes binnen haar definitiegebied.

We kunnen de afgeleiden berekenen door term per term af te leiden:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2}$$

Deze reeksen convergeren ook voor elk inwendig punt van het convergentiegebied van de oorspronkelijke machtreeks.

Theorema: het integreren term per term

Indien de functie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

convergeert voor $a - R < x < a + R$ ($R > 0$)

dan convergeert

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

voor $a - R < x < a + R$ en

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

voor $a - R < x < a + R$

Theorema voor het vermenigvuldigen van machtreeksen

Indien $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ absoluut convergeren voor $|x| < R$ en

indien

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Dan convergeert de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

absoluut naar $A(x)B(x)$ voor $|x| < R$: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right)$

11.8 Taylor en Maclaurin Reeksen

Tot nu toe: Kunnen we de machtreeks als een functie zien/definieren?

Nu de "omgekeerde" vraag:

Kunnen we een willekeurige functie f schrijven als een machtreeks?

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

Dus als een lineaire combinatie van een constante, een rechte (term $(x-a)$), een parabool (term $(x-a)^2$), etc. Hoe meer termen we meenemen hoe beter de benadering van f dan wordt. We noemen de machtreeks dan een **Taylorreeks**.

De constante, en de machten van $(x-a)$ zijn hier de **basisfuncties**.

Definitie Taylor reeks en Maclaurin reeks

Zij f een functie, waarvan de afgeleiden van alle orde bestaan in een interval waarvan a een inwendig punt is. De **Taylorreeks** van f in a wordt gedefinieerd als:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

De **Maclaurin reeks** van f is de Taylorreeks van f voor $a=0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

Definitie: Taylorpolynoom van orde n

Zij f een functie die op het interval I tot orde N afleidbaar is. Zij a een inwendig punt van I dan definiëren we de Taylorpolynoom van orde n ($0 \leq n \leq N$) van f in a :

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

11.9 Convergentie van Taylor Reeksen, Afschatting van de fout

Convergentie van een Taylorreeks

$f(x) = n^{\text{de}} \text{ Taylorpolynoom} + \text{restterm}$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Formule van Taylor

Zij f een functie op het open interval I tot op orde $n+1$ afleidbaar is. Zij a en x punten van I dan bestaat er een getal c tussen a en x zodat:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x)$$

$$\text{Met: } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Gevolg

Indien $R_n(x) \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$ voor elke x in I dan zeggen we dat de Taylorreeks van f in a convergeert op I en we schrijven:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

14.1 Functies van Meerdere Veranderlijken

Functies van meerdere veranderlijken

NB: Wij beperken ons tot functies van 2 veranderlijken

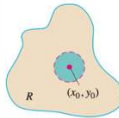
- f = functie van 2 veranderlijken x en y
 $\rightarrow w = f(x,y)$
- x en y : onafhankelijke of input variabelen
- w : afhankelijke of output variabele
- **Domein D** en **range (bereik)** van f

Verzameling van (x,y)
waarvoor f gedefinieerd is

Verzameling van waarden
die f aanneemt

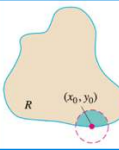
Definitie: Inwendige punt

Een punt (x_0, y_0) in een gebied R van het XY-vlak is een **inwendig punt** van R als het middelpunt is van een schijf met positieve straal die volledig in R ligt.



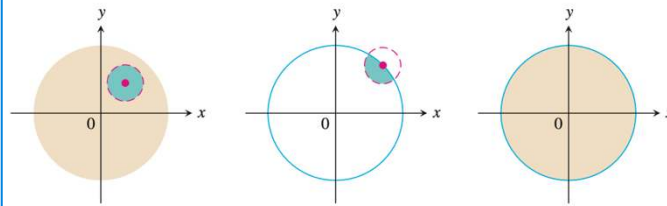
Definitie: Randpunt

Een punt (x_0, y_0) in het XY-vlak is een **randpunt** van R als elke schijf met positieve straal en middelpunt (x_0, y_0) zowel punten bevat die volledig in R liggen als punten die niet in R liggen. Het randpunt moet niet noodzakelijk tot R behoren.



Definitie: Inwendige, Rand, Open en Gesloten

- De verzameling van de inwendige punten van een domein R noemen we **het inwendige van R** .
- De verzameling van de randpunten van een domein R noemen we **de rand van R** .
- Een gebied heet **open** indien het enkel inwendige punten bevat.
- Een gebied heet **gesloten** als het zijn rand bevat.



Open unit disk.

Boundary of unit

Closed unit disk.

Definitie: Begrensd en onbegrensd

Een gebied van het vlak is **begrensd** als het binnen een schijf ligt met vaste straal. Een gebied van het vlak heet **onbegrensd** als het niet begrensd is.

Grafiek of oppervlak en niveaulijnen

$(x,y,f(x,y))$ of $z=f(x,y)$

punten in domein waarop f constant is dus $f(x,y) = Cst$

Definitie: Contourlijn

Doorsnede van de grafiek met het vlak $z = c$

14.2 Limieten en Continuïteit in Hogere Dimensies

Definitie:

De functie f heeft limiet L als (x,y) het punt (x_0, y_0) nadert, indien voor elk positief getal ϵ een positief getal δ bestaat zodat voor alle (x,y) in het domein van f geldt dat als:

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

We schrijven:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$$

in inwendige mag op rand

NB: vergelijk met de definitie bij een functie van 1 variabele

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ zodat als } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ geldt dat } |f(x) - L| < \varepsilon$$

alle punten x op een afstand van x_0 die kleiner is dan δ uitgezonderd x_0 zelf

$$\Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta \text{ wordt vervangen door } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

want in 2 dimensies is de afstand tussen (x, y) en (x_0, y_0) gelijk aan $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$$f(x, y) = x \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0$$

$$f(x, y) = y \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} y = y_0$$

$$f(x, y) = k \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k$$

BEWIJS: Limieten van functies met 2 variabelen

$$\textcircled{1} f(x, y) = x \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ zodat als } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| = \sqrt{(x - x_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \varepsilon \quad \rightarrow \text{bewezen dat } |x - x_0| < \varepsilon \quad \checkmark$$

kies $\varepsilon = \delta$

$$\textcircled{2} f(x, y) = y \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} y = y_0$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ zodat als } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |y - y_0| < \varepsilon$$

$$|y - y_0| = \sqrt{(y - y_0)^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \varepsilon \quad \rightarrow \text{bewezen dat } |y - y_0| < \varepsilon \quad \checkmark$$

kies $\varepsilon = \delta$

$$\textcircled{3} f(x, y) = k \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ zodat als } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |k - k| < \varepsilon$$

$|k - k| = 0$
 dus altijd $< \varepsilon$

THEOREM 1 Properties of Limits of Functions of Two Variables

The following rules hold if L , M , and k are real numbers and

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L \quad \text{and} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = M.$$

- Sum Rule:** $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = L + M$
- Difference Rule:** $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x, y) - g(x, y)) = L - M$
- Product Rule:** $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = L \cdot M$
- Constant Multiple Rule:** $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (kf(x, y)) = kL \quad (\text{any number } k)$
- Quotient Rule:** $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0$
- Power Rule:** If r and s are integers with no common factors, and $s \neq 0$, then

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x, y))^{r/s} = L^{r/s}$$

provided $L^{r/s}$ is a real number. (If s is even, we assume that $L > 0$.)

Definitie: Een functie $f(x, y)$ is continu in een punt (x_0, y_0) indien:

i) f gedefinieerd is in (x_0, y_0)

ii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$ bestaat

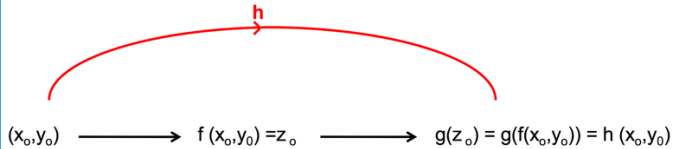
iii) $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Definitie: Een functie heet continu indien ze continu is in elk punt van haar domein

Gevolg: Rationale functies zijn continu in hun domein

De limiet verschilt naargelang de "weg" die je volgt → de limiet bestaat niet

Samengestelde functies



Continuïteit van samengestelde functies:

Indien f continu is in (x_0, y_0) en g is een functie van 1 variabele die continu is in $f(x_0, y_0)$, dan is de samengestelde functie $h = g \circ f$ gedefinieerd als:

$h(x, y) = g(f(x, y))$ continu in (x_0, y_0) .

14. 3 Partiële Afgeleiden

De partiële afgeleide van $f(x, y)$ naar x in het punt (x_0, y_0) wordt gedefinieerd als:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{d}{dx} f(x, y_0) \Big|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

De partiële afgeleide van $f(x, y)$ naar y in het punt (x_0, y_0) wordt gedefinieerd als:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = \frac{d}{dy} f(x_0, y) \Big|_{y=y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Tweede orde partiële afgeleiden

Definities:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

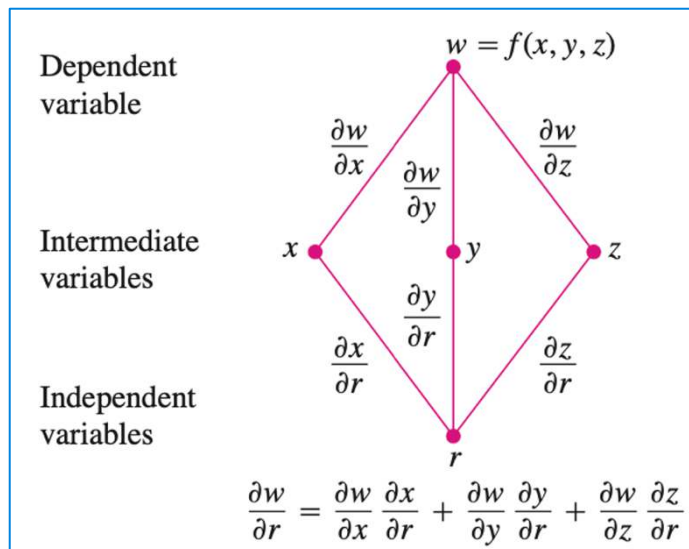
Stelling van de gemengde partiële afgeleiden

Indien de functie $f(x, y)$ en haar partiële afgeleiden f_x , f_y , f_{xy} en f_{yx} bestaan in een omgeving van (a, b) en

indien deze allen continu zijn in (a, b) dan geldt:

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

14.4 Kettingregel (NIET KENNEN VOLGENS OVERZICHT)



14.7 Extremas en Zadelpunten

Definitie van een lokaal maximum en lokaal minimum

Zij f een functie van 2 variabelen gedefinieerd op een domein R dat het punt (a,b) bevat. Dan is

1. $f(a,b)$ de waarde van een lokaal maximum van f indien $f(a,b) \geq f(x,y)$ voor alle punten (x,y) van het domein die in een open schijf gecentreerd rond (a,b) liggen.
2. $f(a,b)$ de waarde van een lokaal minimum van f indien $f(a,b) \leq f(x,y)$ voor alle punten (x,y) van het domein die in een open schijf gecentreerd rond (a,b) liggen.

Stelling: Eerste afgeleide test voor een lokaal extremum

Indien $f(x,y)$ een lokaal maximum of minimum heeft in een inwendig punt (a,b) van haar domein en indien beide partiële afgeleiden bestaan in (a,b) dan geldt:
 $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$

Gevolg: Een functie kan enkel extreme waarden hebben in :

- i) Ofwel inwendige punten waar beide partiële afgeleiden nul zijn
- ii) Inwendige punten waar één of beide partiële afgeleiden niet bestaan
- iii) Randpunten van het domein van de functie

Definitie: kritisch punt

Een inwendig punt van het domein van $f(x,y)$ waar beide partiële afgeleiden nul zijn of minstens één van beide partiële afgeleiden niet bestaat noemen we een kritisch punt van f .

Gevolg: een functie heeft enkel lokale extrema in kritische punten of randpunten. Niet elk kritisch punt is echter een extremum. We kunnen bijvoorbeeld ook zadelpunten hebben.

Definitie: Zadelpunt

Een functie $f(x,y)$ heeft een zadelpunt in het kritisch punt (a,b) indien er zich in elke omgeving van (a,b) in het domein van de functie zowel punten bevinden met $f(x,y) > f(a,b)$ als punten met $f(x,y) < f(a,b)$. Het punt $(a,b,f(a,b))$ op de grafiek van f heet dan een zadelpunt van het oppervlak van f .

Stelling: Tweede afgeleide test voor lokale extrema

Indien $f(x,y)$ en zijn eerste en tweede partiële afgeleiden continu zijn in een omgeving van een inwendig punt (a,b) en tevens $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ dan geldt

- i) f heeft een lokaal maximum in (a,b) als $f_{xx} < 0$ en $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ in (a,b)
- ii) f heeft een lokaal minimum in (a,b) als $f_{xx} > 0$ en $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ in (a,b)
- iii) f heeft een zadelpunt in (a,b) als $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ in (a,b)

De test geeft geen uitsluitsel indien $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ in (a,b)

NB: De uitdrukking $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ is gelijk aan de determinant van de volgende matrix:

$$\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Deze matrix noemt men de Hessiaan van de functie $f(x, y)$

Werkwijze voor het zoeken van lokale extrema en zadelpunten van f indien de eerste en 2de orde partiële afgeleiden overal bestaan en continu zijn.

1. Bereken alle eerste en tweede orde partiële afgeleiden van f
2. Zoek de kritische punten i.e. de punten (a, b) van het domein waar beide eerste orde partiële afgeleiden nul zijn. (NB: vermits de eerste orde partiële afgeleiden overal bestaan zijn de kritische punten de punten waar deze beiden gelijk zijn aan nul)
3. Bereken f_{xx} en $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ in (a, b) en gebruik bovenstaande stelling
4. Kijk naar de randpunten van je domein: een extremum kan immers op de rand van het domein van de functie liggen

Als we absolute maxima en/of **absolute** minima moeten zoeken op een **gesloten** gebied D doorlopen we de volgende stappen:

1. Teken het gesloten gebied
2. Zoek de lokale extrema in het inwendige van D en bereken er de functiewaarde
3. Zoek de lokale extrema op de rand van D en bereken er de functiewaarde
4. Besluit: bekijk de lijst van bovenstaande functiewaarden: het punt met de grootste/kleinste functiewaarde is het absoluut maximum/minimum