

Wiskunde: Calculus II: Bewijzen

(9)

Bewijs 1

Theorema i.v.m. l'Hôpital HB p. 576-577

T.B. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

Bewijs:

Stel dat de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, dan is er voor elk positief getal ϵ een nummer M dat voor alle x geldt:

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Als N een integer groter is dan M en groter dan of gelijk aan n_0 . Dan:

$$n > N \Rightarrow a_n = f(n) \text{ en } |a_n - L| = |f(n) - L| < \epsilon$$

Bewijs 2

Meetkundige reeks HB p. 587-588

T.B. $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$
convergeert naar $\frac{a}{1-r}$ als $|r| < 1$ en divergeert als $|r| \geq 1$

Bewijs

Als $r = 1$, de n^{de} partiële som van de meetkundige reeks is:

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \dots + a(1)^{n-1} = na$$

en de reeks divergeert omdat de $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \pm \infty$ afhankelijk van het teken van a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a \lim_{n \rightarrow \infty} n = \pm \infty \text{ reeks divergent}$$

Als $r = -1$ dan zal de reeks ook divergeren omdat de n^{de} partiëlsom alterneert tussen a en 0 ②

Als $|r| \neq 1$ dan kunnen we de convergentie of divergentie op de volgende manier afdrukken

$$s_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

$$r s_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\Rightarrow s_n - r s_n = a - ar^n$$

$$\Rightarrow (1-r) s_n = a(1-r^n)$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

Bij $r \neq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$|r| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

en dus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r}$$

reeks convergent

$$|r| > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

rij s_n divergent

reeks divergent

Bewijs 3

Telescopische reek

TB: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Bewijs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

Bewijs 4

TB $\sum (a_n + b_n)$ is divergent als $\sum a_n = \text{conv}$
en $\sum b_n = \text{div}$.

Bewijs

Uit het ongeijmde:

Stel $\sum (a_n + b_n)$ convergent is
Je weet dat $\sum a_n$ conv.

$\Rightarrow \sum (a_n + b_n - a_n)$ is convergent
 $\sum b_n$ convergent is niet mogelijk

$\Rightarrow \sum (a_n + b_n)$ is divergent

Bewijs 5

(5)

De integraal test

TB: rij de partiële sommen is stijgend

Bewijs

$$s_{n+2} \geq s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$$

harmonische reeks

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{2}} + \dots \{s_n\} \text{ niet begrensd}$$

Bewijs 6

De integraal test

TB: Zij $\{a_n\}$ een rij met positieve termen.

$a_n = f(n)$ f : positieve, dalende continue functie voor $x > N$ ($N > 0$) dan $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ beide convergeren of divergeren.

Bewijs Voorbeeld: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

$$a_n = f(n) = \frac{1}{1+n^2} \xrightarrow{b} \text{convergent}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan(x) \right]_1^b$$

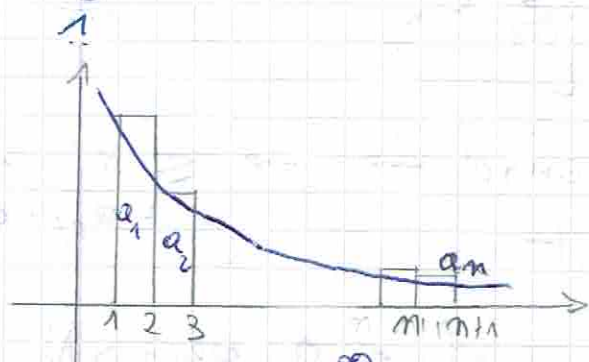
$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Som moet niet gelijk zijn aan integraal

Bij $N=1$

(5)

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + \int_1^n f(x) dx$$



(1) Stel dat $\int_1^\infty f(x) dx$ convergent is
 $\sum_{k=1}^\infty a_k$ begint door $a_1 + \int_1^\infty f(x) dx$
 $\hookrightarrow$ convergent

(2) Stel $\int_1^\infty f(x) dx$ divergent is dan $\sum_{k=1}^\infty a_k$ diver.

Bewijs 7

De directe vergelykingstest

T.B.: Zij $\sum a_n$ een reeks met positieve termen; dan geldt

i) Als er een convergente reeks $\sum c_n$ bestaat met $a_n \leq c_n$ voor alle $n > N$ (N een geheel getal) dan convergeert $\sum a_n$

ii) Als er een positieve divergente reeks $\sum d_n$ bestaat met $d_n \leq a_n$ voor alle $n > N$ (N een geheel getal) dan divergeert $\sum a_n$

Bewijs

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$\leq \leq \leq b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

$$d_1 + d_2 + d_3$$

$$\leq \leq \leq a_1 + a_2 + a_3$$

i) $\sum a_n$ is convergent als $\sum c_n$ convergent is met $c_n \geq a_n$ voor $n > N$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \dots \quad (6)$$

$$\leq a_1 + a_2 + \dots + a_N + c_{N+1} + c_{N+2} + \dots$$

$$\leq a_1 + a_2 + a_N + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$\text{als } c_n \text{ conv. } \sum c_n = L$$

$$s_n \text{ is stijgend en begrensd door } \rightarrow \leq a_1 + a_2 + \dots + a_N + L$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ convergeert}$$

$$II) \sum d_n \text{ divergent en } d_n \leq a_n \text{ als } n > N$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ divergent}$$

$$\text{Stel dat } \sum a_n \text{ convergent is } \Rightarrow \sum d_n \text{ conv.}$$

= contradictie

Dus $\sum a_n$ is ook divergent als $\sum d_n$ divergent is.

Bewijs 8

De limietvergelijkingstest HBP 603

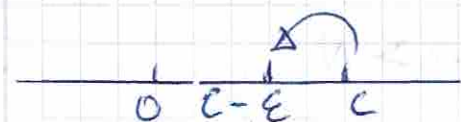
TB: Zij $a_n > 0$ en $b_n > 0$ voor alle $n > N$
 N (positief geheel getal)

en zij $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ dan geldt

1) Indien $\infty > c > 0$ dan zullen de reksen $\sum a_n$ en $\sum b_n$ beiden convergeren of divergeren

$$\text{Bewijs: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \text{ zodat als } n > M \text{ geldt } \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \epsilon$$



$$\text{ kies } \epsilon = \frac{c}{2}$$

$$\begin{aligned} -\epsilon &< \frac{a_n}{b_n} - c < \epsilon \\ \Leftrightarrow c - \epsilon &< \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon \\ \Leftrightarrow b_n(c - \epsilon) &< a_n < b_n(c + \epsilon) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists M$ zodat als $n > M$

$$0 < \frac{c}{2} b_n < a_n < \frac{3c}{2} b_n$$

i) als $\sum b_n$ conv $\Rightarrow \sum \frac{3c}{2} a_n$ conv $\stackrel{i)}{\Rightarrow} \sum a_n$ conv

ii) als $\sum a_n$ conv $\stackrel{ii)}{\Rightarrow} \sum \frac{c}{2} b_n$ conv $\Rightarrow \sum b_n$ conv.

iii) als $\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum \frac{c}{2} a_n$ div $\stackrel{iii)}{\Rightarrow} \sum a_n$ div

iv) als $\sum a_n$ div $\stackrel{iv)}{\Rightarrow} \sum \frac{3c}{2} b_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div.

Bewijs 9

De verhoudings test HB p 606

T.B.: Zij $\sum a_n$ een reeks met strikt positieve termen
en zij $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ dan geldt:

i) als $\rho < 1$ dan convergeert de reeks

ii) als $\rho > 1$ of $\rho = \infty$ dan divergeert de reeks

iii) als $\rho = 1$ weet je niets over de convergentie v.d. reeks

Bewijs: $a_n > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$

i) $\rho < 1$ $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ zodat als $n \geq M$ geldt $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho \right| < \epsilon$

$$-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \rho < \epsilon$$

$$\rho - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \epsilon + \rho$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \pi \text{ of } a_{n+1} < \pi a_n$$

$$a_{M+3} < \pi a_{M+2} < \pi(\pi a_{M+1})$$



kies ϵ zodat $\rho + \epsilon < 1$

π

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + a_{M+3} + a_{M+4}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_M + a_{M+1} + \pi a_{M+1} + \pi^2 a_{M+1} + \pi^3 a_{M+1}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_M + a_{M+1} \frac{1}{1-\pi}$$

conv $\stackrel{\text{vgl test}}{\Rightarrow} \sum a_n$ convergent

11) $p > 1: \forall \epsilon > 0 \exists M > 0$ zodat als $n > M$ geldt volgt (8)

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - p \right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow p - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \epsilon + p$$

$$\Leftrightarrow a_n < \underbrace{(p - \epsilon)}_1 a_n < a_{n+1}$$

termen in reeks worden groter

$\{a_n\} \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergeert

Bewijs 10

Theorema van Leibniz HB p 611

T.B.: De reeks $\sum (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots$

convergeert als aan de 3 volgende voorwaarden voldaan zijn

- 1) De termen u_n zijn allen positief
- 2) $u_n \geq u_{n+1}$ vanaf een bepaalde $n = N$
- 3) De rij u_n convergeert naar 0

Bewijs: Stel $N=1$. Als n een even geheel getal is

$n=2m$ dan is de som van de eerste n termen:

$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \\ &= u_1 - \underbrace{(u_2 - u_3)}_0 - \underbrace{(u_4 - u_5)}_0 - \dots - \underbrace{(u_{2m-1} - u_{2m})}_0 - u_{2m} \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} = L$$

Als n een "odd integer": $n=2m+1$ dan

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \rightarrow L + 0 = L \quad \text{omdat}$$

$$u_n \rightarrow 0 \text{ en } m \rightarrow \infty$$

rij der partiële sommen is stijgend (9)
 $\{s_{2m}\}$ stijgend met bovenrem u_1

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = L \Rightarrow \text{reeks convergent}$$

Bewijs 11

Absolute convergentietest ITB n 6-13

T.B.: Als $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeert dan convergeert
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ook

Bewijs: $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$

Dus $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

Als $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeert dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ ook

Door middel van de directe vergelijkingstest convergeert
 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ ook. Dus

$$\sum a_n + |a_n| - \sum |a_n| \Rightarrow \text{convergent}$$

het verschil van convergente reeksen is convergent

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ convergent}$$