

Examen Calculus: oefeningen  
**Wiskunde: calculus en lineaire algebra**

|                   |
|-------------------|
| NAAM EN VOORNAAM: |
|-------------------|

|            |
|------------|
| OPLEIDING: |
|------------|

Kruis aan indien je een vrijstelling hebt voor het onderdeel **lineaire algebra**:

☐

1. Bereken de lengte van de kromme

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{4}{3}t^{3/2} \\ y(t) &= t + \sin(e^2) \end{cases} \quad \text{voor } 0 \leq t \leq 2.$$

**Oplossing:** Eerst leiden we  $x$  en  $y$  af naar  $t$ :

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2\sqrt{t} \\ y'(t) &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Merk op dat als we  $\sin(e^2)$  afleiden naar  $t$ , we 0 krijgen omdat  $\sin(e^2)$  een constante is. Veel studenten probeerden dit toch af te leiden.

Vervolgens vullen we de formule in voor booglengte:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{4t + 1} dt \end{aligned}$$

We gebruiken de substitutie  $u = 4t + 1 \Rightarrow du = 4dt$  en  $t = 0 \Rightarrow u = 1, t = 2 \Rightarrow u = 9$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int_1^9 \sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^9 = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

|                   |
|-------------------|
| NAAM EN VOORNAAM: |
|-------------------|

2. Ga na of de volgende reeks absoluut convergent, conditioneel convergent of divergent is:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

**Oplossing:** De reeks is alternerend. We gaan dus eerst na of hij absoluut convergent is.

De hoogste graad van  $n$  in de noemer is 1, dus we vermoeden dat  $\frac{1}{n-\sqrt{n}}$  zich zal gedragen als  $\frac{1}{n}$  op oneindig en bijgevolg zal de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

net als

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergeren. Merk op dat deze laatste reeks divergeert omdat het een  $p$ -reeks is met  $p = 1$ . Dat is natuurlijk maar een vermoeden dat we nog moeten aantonen. Dat kan met de limietvergelijkingstest:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Het getal 1 ligt strikt tussen 0 en  $\infty$  dus de limietvergelijkingstest bevestigt ons vermoeden dat de reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

niet convergent is. De reeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

is dus niet absoluut convergent.

Als een alternerende reeks niet absoluut convergent is, kan de reeks nog steeds conditioneel convergent zijn. Dit kunnen we nagaan met het criterium van Leibniz. Stel  $u_n = \frac{1}{n-\sqrt{n}}$ .

- (a) Ten eerste moeten de  $u_n \geq 0$ . Het volstaat om op te merken dat voor  $n \geq 1$  geldt dat  $n \geq \sqrt{n}$ , en de reeks begint maar vanaf  $n = 2$  te sommeren, dus die voorwaarde is voldaan.
- (b) Ten tweede moet gelden dat  $u_n \geq u_{n+1}$  voor alle  $n$  groter dan een zekere  $n$ . Dat betekent dat de functie moet dalen vanaf een bepaald punt. We kunnen dit nagaan door over te gaan naar een continue functie en diens afgeleide te bestuderen:

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x}} = (x - x^{1/2})^{-1} \Rightarrow f'(x) = (-1)(x - x^{1/2})^{-2} \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Zij  $x \geq 2$ . De eerste factor is negatief, de tweede factor is positief omdat, zoals eerder opgemerkt,  $x \geq \sqrt{x}$  en de derde factor is ook positief omdat  $1 \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$  voor  $x \geq 2$ . Dus voor  $x \geq 2$  geldt  $f'(x) < 0$  en de functie  $f(x)$  daalt.

(c) Ten derde moet gelden dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = 0 \cdot \frac{1}{1 - 0} = 0$$

Uit het criterium van Leibniz volgt nu dat de reeks conditioneel convergent is.

|                   |
|-------------------|
| NAAM EN VOORNAAM: |
|-------------------|

3. Gegeven de functie:

$$f(x) = \sin(x^3 + 2x^2 + 3x)$$

Bepaal de eerste niet-nulle term van de Maclaurinreeks van de functie  $f$ .

**Oplossing:** De Maclaurinreeks van  $f(x)$  wordt gegeven door de formule

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

We zijn dus op zoek naar de eerste afgeleide  $f^{(k)}$  van  $f$  zodat  $f^{(k)}(0) \neq 0$ . Dat zal ons de eerste niet-nulle term van de Maclaurinreeks opleveren.

Eerst kijken we naar de nulde afgeleide, dus  $f$  zelf:  $f(0) = \sin(0) = 0$ . Dit kan het al niet zijn.

Dan kijken we naar de eerste afgeleide:

$$f'(x) = \cos(x^3 + 2x^2 + 3x) \cdot [3x^2 + 4x + 3]$$

Veel studenten vergaten de haakjes te schrijven, dus op deze verbeter sleutel staan ze vierkant en extra groot zodat ze goed opvallen. Ook schreven veel studenten  $-\cos$  in plaats van  $\cos$ .

Dan berekenen we  $f'(0) = \cos(0) \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$ .

De eerste niet-nulle term van de Maclaurinreeks is dus  $3x$ . De  $x$  staat vetgedrukt omdat een aantal studenten dit waren vergeten in hun antwoord.

|                   |
|-------------------|
| NAAM EN VOORNAAM: |
|-------------------|

4. Beschouw de volgende functie in twee variabelen:

$$f(x, y) = 3x^2 - 6xy + 2y^3 - 12y.$$

- (a) Bepaal alle eerste en tweede orde partiële afgeleiden van  $f$ .
- (b) Bepaal alle kritische punten van  $f$ .
- (c) Bepaal waar  $f$  lokale minima, lokale maxima en zadelpunten bereikt.

**Oplossing:**

- (a) De eerste orde partieel afgeleiden van  $f(x, y)$  zijn:

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 6y \\f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y^2 - 12\end{aligned}$$

De tweede orde partieel afgeleiden van  $f(x, y)$  zijn:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = 6 \\f_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = 12y \\f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = -6\end{aligned}$$

Merk op dat  $f_{xy} = f_{yx}$  altijd geldt.

- (b) Vermits  $f_x$  en  $f_y$  overal gedefinieerd zijn, zijn de kritische punten van  $f$  de punten  $(x, y)$  waar  $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ . We berekenen:

$$\begin{aligned}\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ -6x + 6y^2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ -6y + 6y^2 - 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 6(y^2 - y - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 2 \text{ of } y = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

De kritische punten zijn  $(2, 2)$  en  $(-1, -1)$ . Enkele studenten hadden hier ook  $(2, -1)$  en  $(-1, 2)$  aan toegevoegd. Echter voldoen deze punten niet aan  $f_x(x, y) = 0$ .

- (c) Om te bepalen waar  $f$  lokale minima, lokale maxima en zadelpunten bereikt, berekenen we  $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(x, y)$  en  $f_{xx}(x, y)$  in de kritische punten. Voor het kritische punt  $(2, 2)$  krijgen we

$$\begin{aligned}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(2, 2) &= 6 \cdot 24 - (-6)^2 = 108 > 0 \\f_{xx}(2, 2) &= 6 > 0\end{aligned}$$

en  $f$  bereikt een lokaal minimum in  $(2, 2)$ . Voor het kritische punt  $(-1, -1)$  krijgen we

$$(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)(-1, -1) = 6 \cdot (-12) - (-6)^2 = -108 < 0$$

en  $f$  heeft een zadelpunt in  $(-1, -1)$ . Merk op dat we hierbij niet moeten nagaan of  $f_{xx}(-1, -1)$  groter of kleiner is dan 0.

NAAM EN VOORNAAM: