

Calculus 1 Theorie en definities

Hoofdstuk 2: Limieten en continuïteit

2.1 Limieten

Definitie van een limiet

Zij f gedefinieerd op een open interval rond x_0 . We zeggen dat de limiet van f in x_0 L is indien f naar L nadert als x voldoende dicht tot x_0 nadert. Notatie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Situaties waarin de limiet niet bestaat

Soms bestaat de limiet niet in een bepaald punt. Dit kan bijvoorbeeld gebeuren als de functie divergeert (oneindig wordt) of als de linker- en rechterlimieten in een punt verschillend zijn.

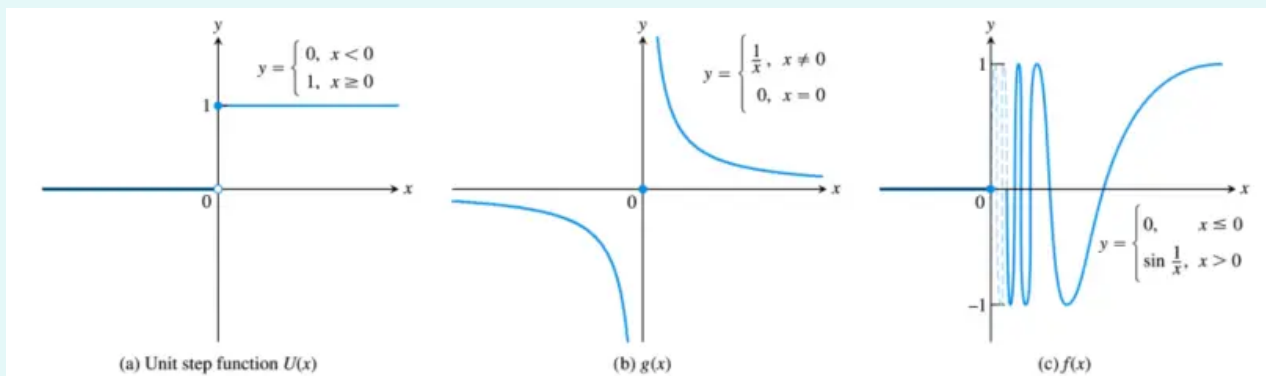


image 21.webp

2.2 Limieten berekenen met limiet eigenschappen/wetten

Rekenregels voor limieten

Als L, M, c en k reële getallen zijn en

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$$

Dan geldt:

1. Som $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. Verschil: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$
3. Product: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. Verm. met een constante: $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$ voor elke getal k
5. Quotient: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ als $M \neq 0$
6. Macht $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$ als r en s gehele getallen zijn zonder kgv en $s \neq 0$

🔗 Limiet van een veelterm vinden door substitutie

Als $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, dan

$$\lim_{x \rightarrow c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0.$$

🔗 Limiet van een rationale functie vinden door substitutie

Als $P(x)$ en $Q(x)$ veeltermen zijn en $Q(c) \neq 0$, dan

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

🔗 Sandwich theorema

Zij $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ voor alle waarden van x in een open interval rond c , behalve evt. in c zelf. Veronderstel tevens dat:

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$$

Dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

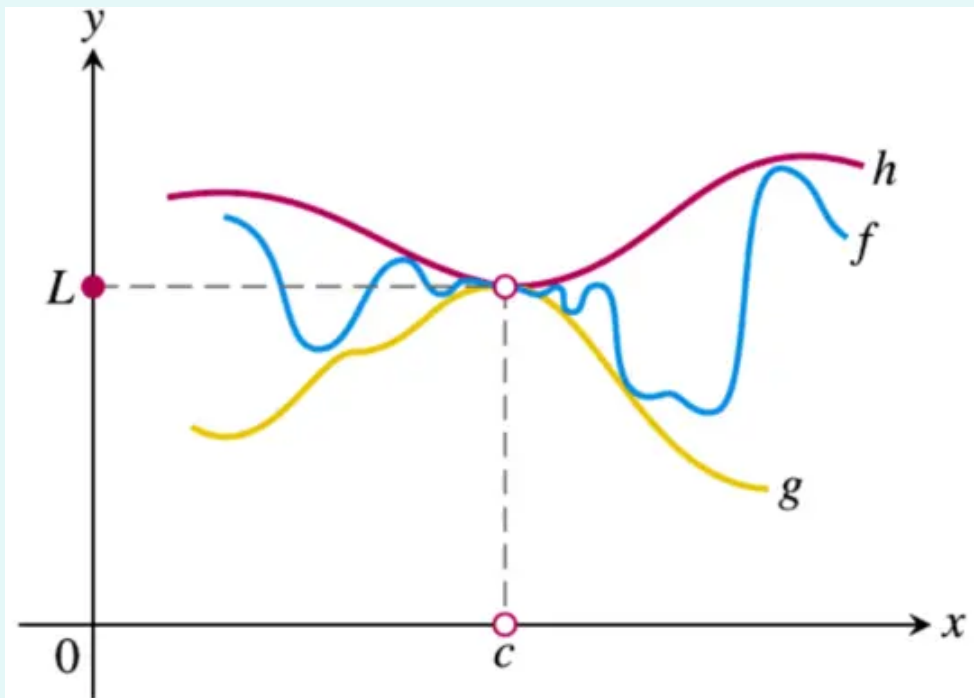


image 1 7.webp

Gevolg: indien $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

🔗 Behoud van ongelijkheid bij limieten

als $f(x) \leq g(x)$ voor alle x in een open interval met c , behalve eventueel bij $x = c$ zelf, en de limieten van f en g bestaan beide naarmate $x \rightarrow c$, dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

2.3 De formele definitie van een limiet

De formele definitie van een limiet

Indien $f(x)$ een functie is die gedefinieerd is op een open interval rond x_0 , uitgezonderd eventueel in x_0 zelf, dan zeggen we dat de limiet van $f(x)$ in x_0 gelijk is aan L , als voor elk getal $\epsilon > 0$ een getal $\delta > 0$ bestaat zodat voor alle x geldt dat als

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

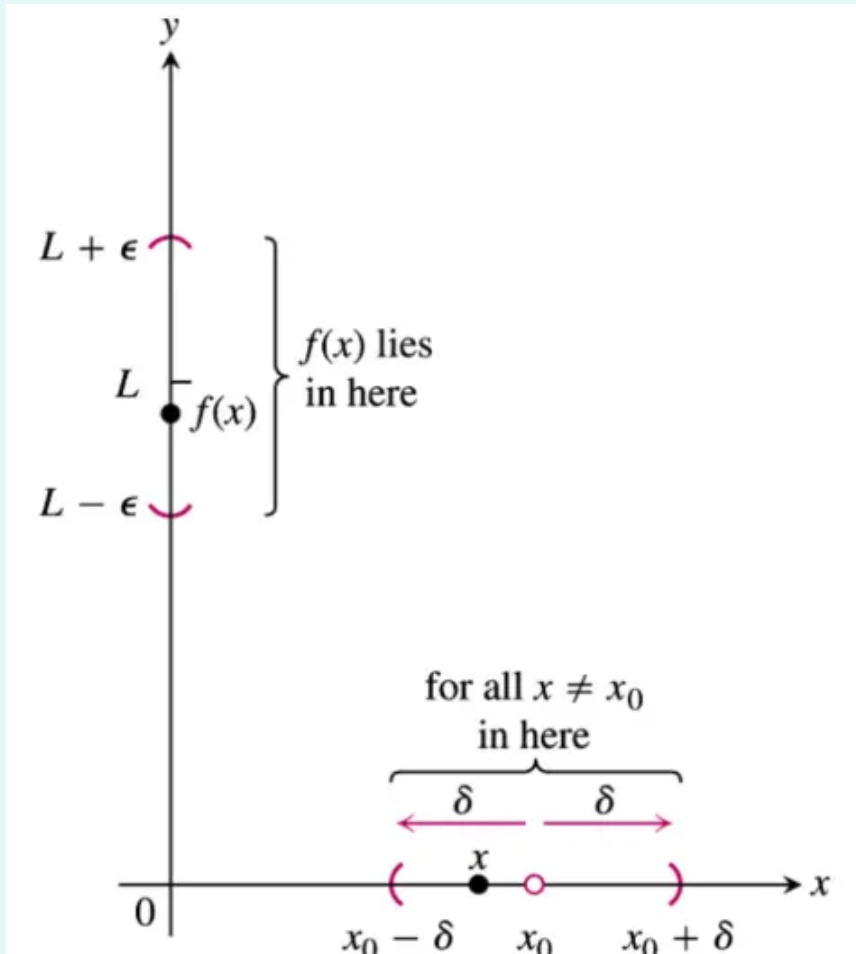


image 2 8.webp

Stappenplan voor het vinden van δ met f, L, x_0 en $\epsilon > 0$ gegeven

1. Los de ongelijkheid $|f(x) - L| < \epsilon$ om een open interval (a, b) met x_0 te vinden zodat de ongelijkheid geldt voor alle $x \neq x_0$
2. Vind een waarde van $\delta > 0$ die het open interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gecentreerd rond x_0 plaatst in het open interval (a, b) . De ongelijkheid $|f(x) - L| < \epsilon$ geldt dan voor alle $x \neq x_0$ in dit δ -interval.

2.4 Eenzijdige limieten en limieten naar oneindig

Definitie linker- en rechterlimiet

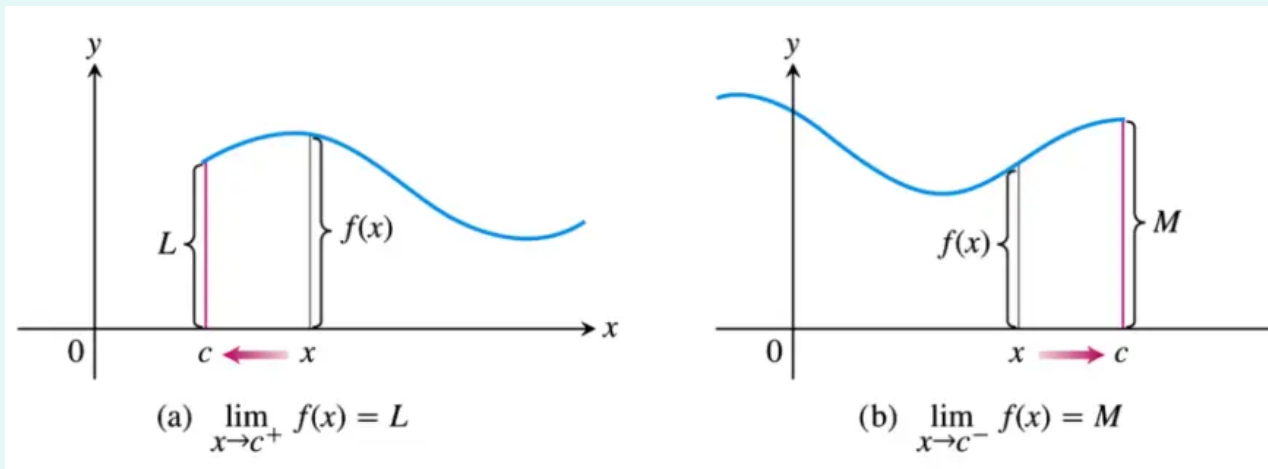


image 3 6.webp

We zeggen dat $f(x)$ een rechterlimiet L heeft in x_0 als:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ zodat voor alle x met $x_0 < x < x_0 + \delta$ geldt dat $|f(x) - L| < \epsilon$.

We schrijven:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

We zeggen dat $f(x)$ een linkerlimiet L heeft in x_0 als:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ zodat voor alle x met $x_0 - \delta < x < x_0$ geldt dat $|f(x) - L| < \epsilon$.

We schrijven:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

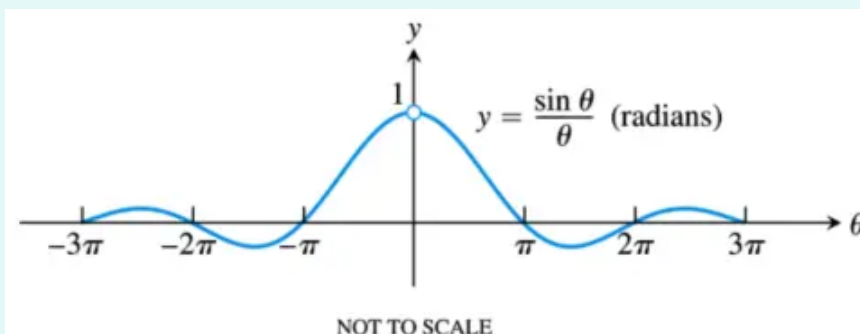
Bijkomende voorwaarde voor het bestaan van een limiet

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad \text{EN} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Limiet bestaat als linker- en rechterlimiet bestaan en gelijk zijn.

Eigenschap

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (\theta \text{ in radialen})$$



Oneindige limieten

Limiet in $+\infty$:

- $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ als $M < x \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

We schrijven:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Limiet in $-\infty$

- $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ als $x < -M \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0, \exists N < 0$ als $x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

We schrijven:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

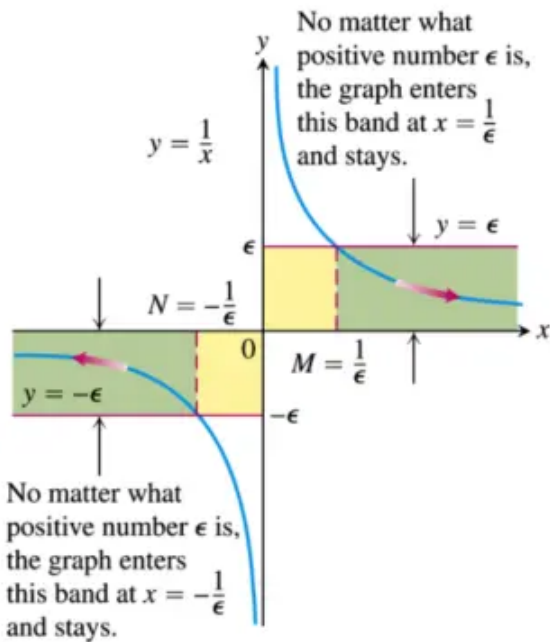


image 5 3.webp

Rekenregels voor oneindige limiet

Als L , M en k reële getallen zijn en

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = M$$

Dan geldt:

- Som $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + g(x)) = L + M$

2. Verschil: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - g(x)) = L + M$
3. Product: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
4. Verm. met een constante: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$ voor elke getal k
5. Quotient: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ als $M \neq 0$
6. Macht $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$ als r en s gehele getallen zijn zonder kgv en $s \neq 0$

2.5 Verticale limieten en asymptoten

🔗 Horizontale asymptoot

De rechte $y = b$ is een horizontale asymptoot van de grafiek $y = f(x)$ als

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{of} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

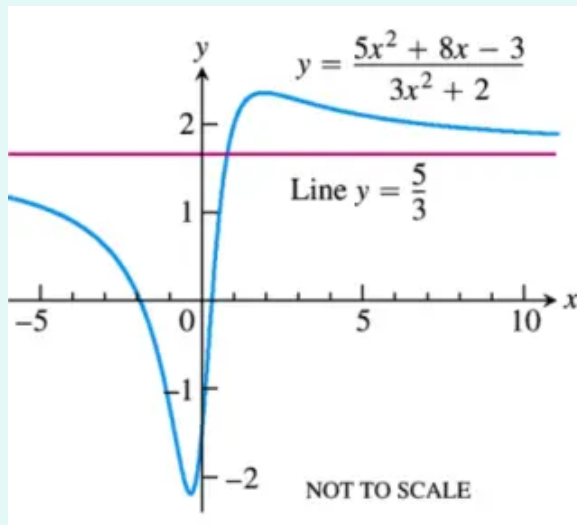


image 6 3.webp

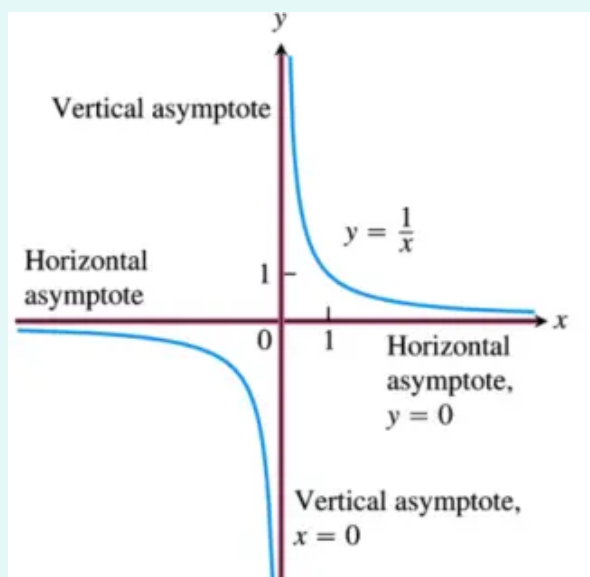


image 7 3.webp

🔗 Verticale asymptoot

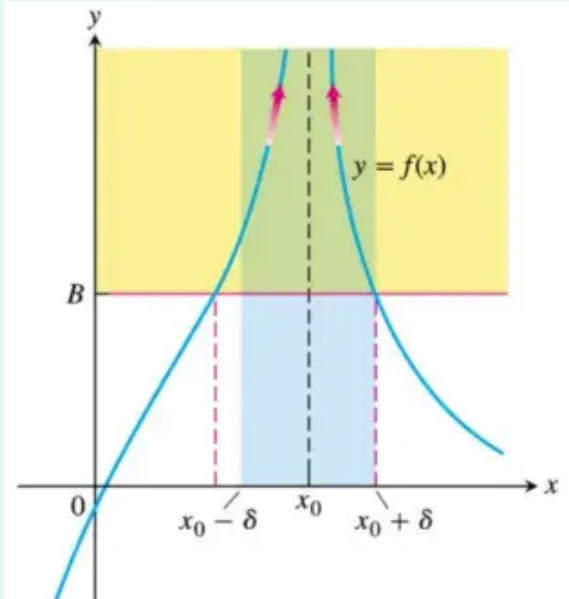
De rechte $x = a$ is een verticale asymptoot van de grafiek $y = f(x)$ als

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \text{ of } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Deze limieten bestaan eigenlijk niet → oneigenlijke integralen

Oneigenlijke limieten

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ als $\forall B > 0, \exists \delta > 0$ als $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B$



8ed1b084-771c-45a5-bb8a-9e9441750ac0.webp

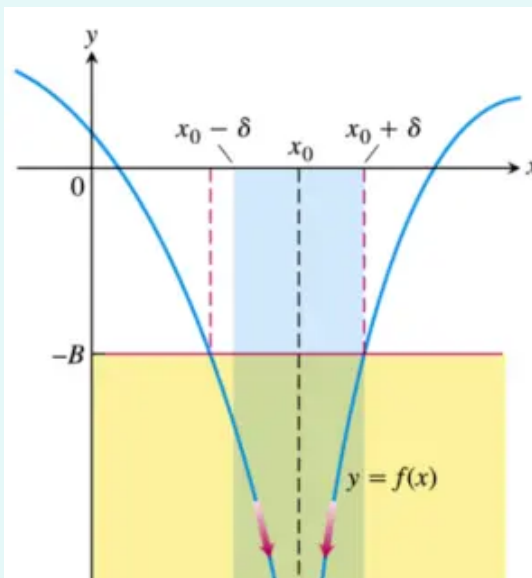


image 8 3.webp

Vinden van asymptoten bij rationale functies

1. VA: Zoek de nulpunten van de noemer die geen nulpunten zijn van de teller
 - bv: a en b en... $\Rightarrow x = a$ en $x = b$ en ... zijn de VA
2. HA:
 - graad van teller < graad van noemer $\Rightarrow$ X-as is een HA
 - graad van teller = graad van noemer $\Rightarrow$ HA doe moet de X-as is
3. SA:

- graad van teller = graad van noemer + 1 $\Rightarrow$ SA

🔗 Schuine asymptoot

Rechte waarvoor geldt dat de functie zich op oneindig schuin gedraagt.

Oplossen met euclidische deling

2.6 Continuïteit

🔗 Definitie continuïteit in een punt c

1. In een inwendig punt: een functie $f(x)$ is continu in een inwendig punt c van haar domein als

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

1. In een eindpunt: een functie $f(x)$ is continu in een linkereindpunt a of rechtereindpunt b van haar domein als

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b)$$

We zeggen: f is rechtscontinu in a en/of linkscontinu in b

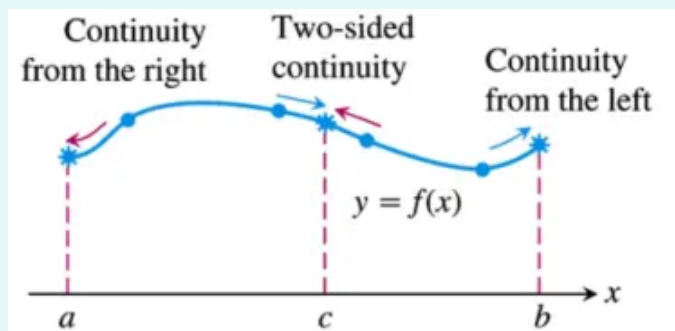


image 9 3.webp

🔗 Continuïteitstest

Een functie $f(x)$ is continu in c a.s.a. aan de volgende 3 voorwaarden voldaan is:

1. $f(c)$ bestaat (dus behoort tot domein van f)
2. de limiet van f in c bestaat
3. de limiet is gelijk aan de functiewaarde.

- opm: als c een randpunt is of als we spreken van links- of rechtscontinuïteit dan moeten we in het bovenstaande de eenzijdige limiet gebruiken.

🔗 Discontinuïteit

f is discontinu in c indien f niet continu is in c .

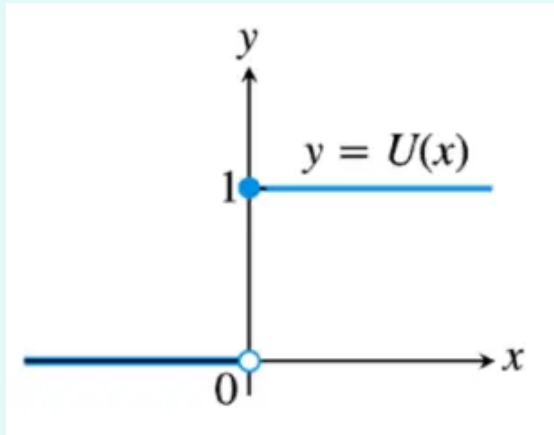


image 10 3.webp

Een functie die rechtscontinu maar niet linkscontinu is.

Soorten discontinuïteit in het punt $x = 0$

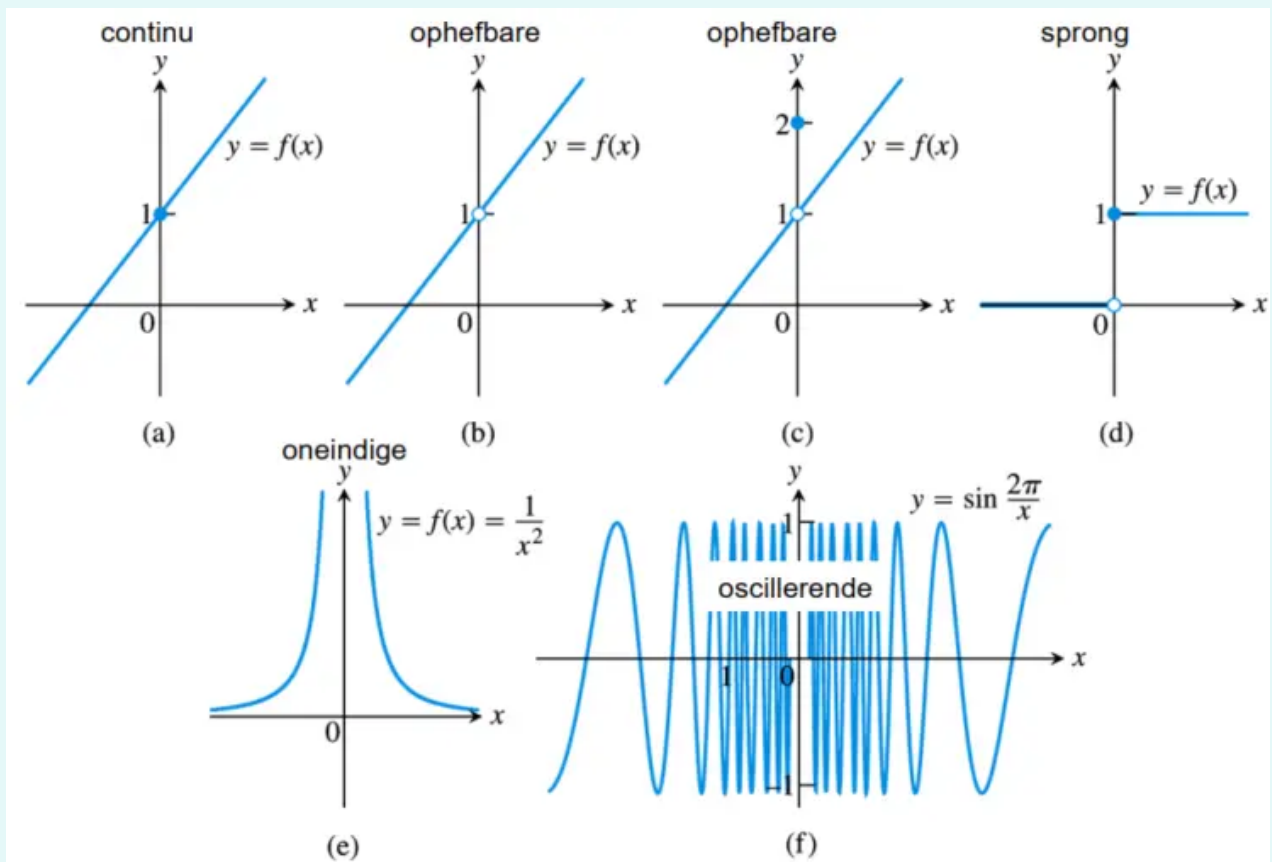


image 11 3.webp

Continuïteit in een interval

Een functie f is continu in een interval als en slechts als f continu is in elk punt van het interval

- Merk op: niet hetzelfde als continu zijn in je domein

- voorbeeld: $y = \frac{1}{x}$ is continu in haar domein $(-\infty, 0] \cup [0, \infty[$, dus elk punt behalve 0 omdat $1/0$ niet gedefinieerd is), maar bijvoorbeeld niet in $] - 1, 1[$, het is discontinu als $x = 0$

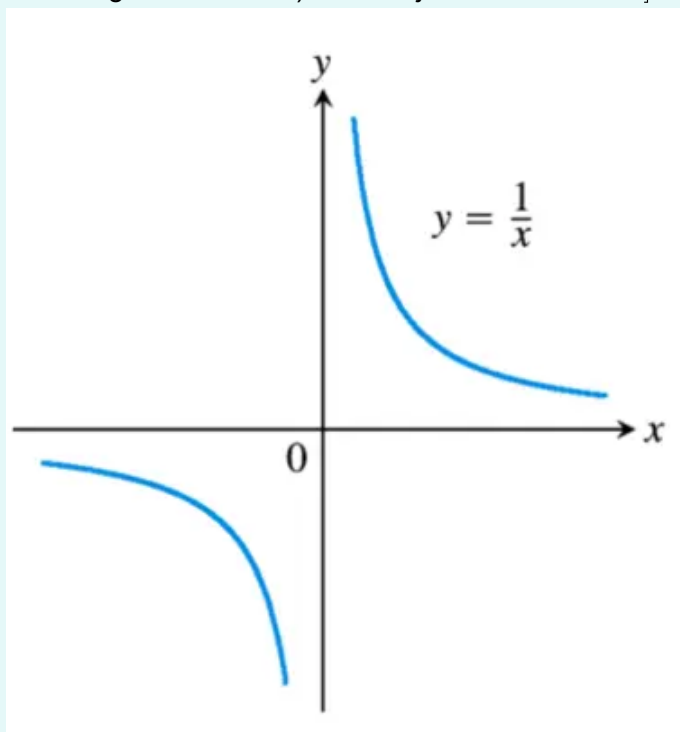


image 12 3.webp

🔗 Eigenschappen van continue functies

Als de functies f en g continu zijn bij $x = c$, dan zijn de volgende combinaties continu bij c :

1. Som $f + g$

2. Verschil:

$$f - g$$

3. Product:

$$f \cdot g$$

4. Verm. met een constante:

$$k \cdot f \text{ voor elke getal } k$$

5. Quotient: f/g als $g(x) \neq 0$

6. Macht

$f^{r/s}$ als het gedefinieerd is op een open interval met c , en r en s gehele getallen

Gevolg: veeltermfuncties, rationale functies en de absolute waardefunctie $f(x) = |x|$ zijn continu

🔗 Samenstelling van continue functies

Als f continu is in c en g continu is in $f(c)$, dan is de samengestelde functie $g \circ f$ continu in c .

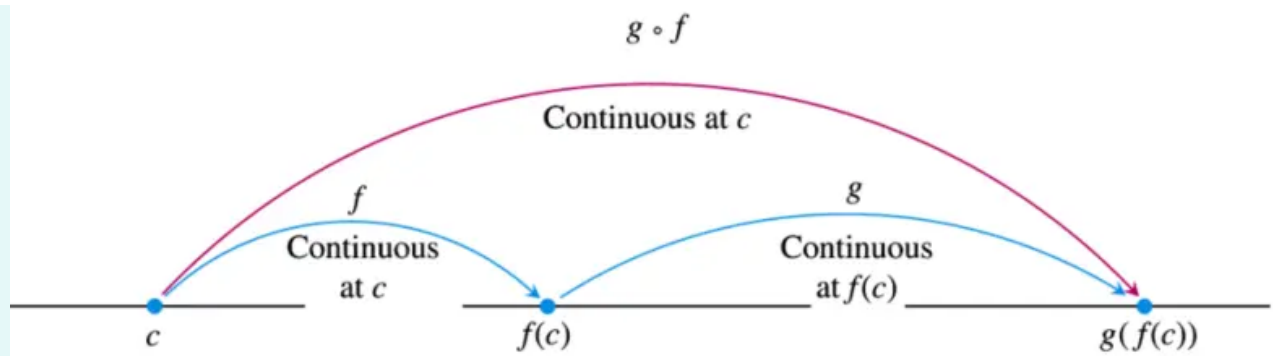


image 13.3.webp

🔗 Continue uitbreiding van een functie

Indien $f(c)$ niet bestaat maar $\lim_{x \rightarrow c} = L$ dan kunnen we een nieuwe functie F definiëren met

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{voor } x \neq c \\ L & \text{voor } x = c \end{cases}$$

F is continu in c . We noemen F de continue uitbreiding van f in c .

🔗 De tussenwaardestelling voor continue functies

Een functie $y = f(x)$ die continu is op een gesloten interval $[a, b]$ neemt op dit interval elke waarde aan tussen $f(a)$ en $f(b)$.

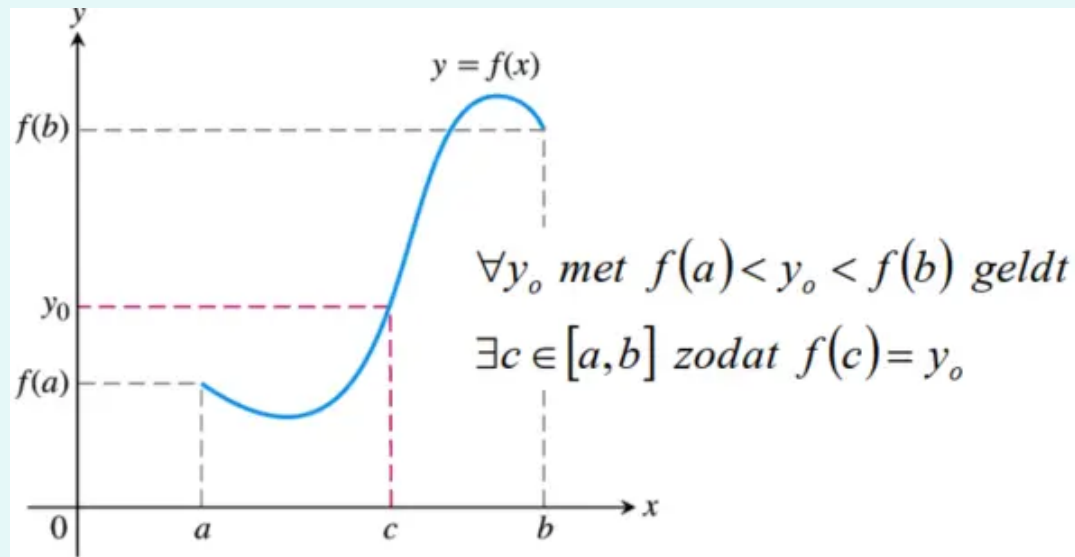


image 14.3.webp

Als je dus een functie hebt die continu is maar geen functiewaarden heeft tussen $y=2$ en $y=3$ is deze niet continu.

2.7 Raaklijnen (intro afgeleiden)

🔗 Definitie raaklijn aan een grafie

De raaklijn aan een grafiek in een punt P is de rechte door P , waarvan de richtingscoëfficiënt de limiet is van de richtingscoëfficiënten van de koorden PQ als Q het punt P nadert

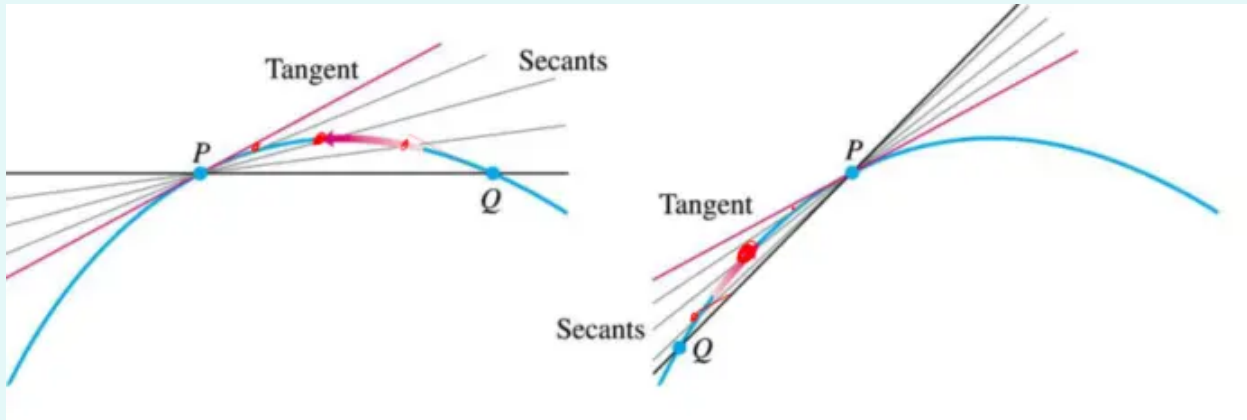


image 15 3.webp

Definitie helling (rico)

De helling van de grafiek $y = f(x)$ in het punt $P(x_0, f(x_0))$ is het getal m met

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(als deze limiet bestaat)

De raaklijn aan de grafiek in het punt P is de rechte door P met m als richtingscoëfficiënt: $y - f(x_0) = m(x - x_0)$

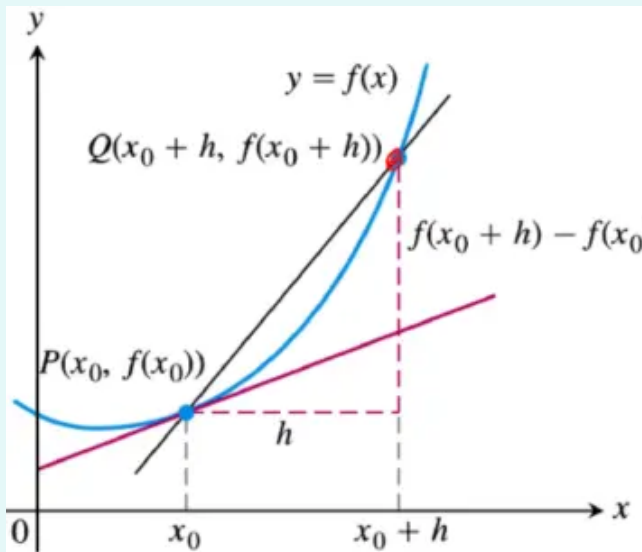


image 16 3.webp

(= de afgeleide van f in $x_0 = f'(x_0)$)

Hoofdstuk 3: Afgeleiden

3.1 De afgeleide functie

Definitie van de afgeleide functie

De afgeleide $f'(x)$ naar x van een functie $f(x)$ in het punt x is gedefinieerd als:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Als deze bestaat zeggen we dat f differentieerbaar is in x of f een afgeleide heeft in x .
- Notatie: $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$
- Als het domein van f' en f gelijk zijn is f differentieerbaar
- f is differentieerbaar op een open interval als f' bestaat voor elk punt in dit interval

Afleidbaarheid

f is afleidbaar op een gesloten interval, indien f afleidbaar is op het open interval en de linker- en rechterlimiet respectievelijk in het rechter- en linkereindpunt bestaan. We noemen deze limieten de linker- en rechterafgeleide.

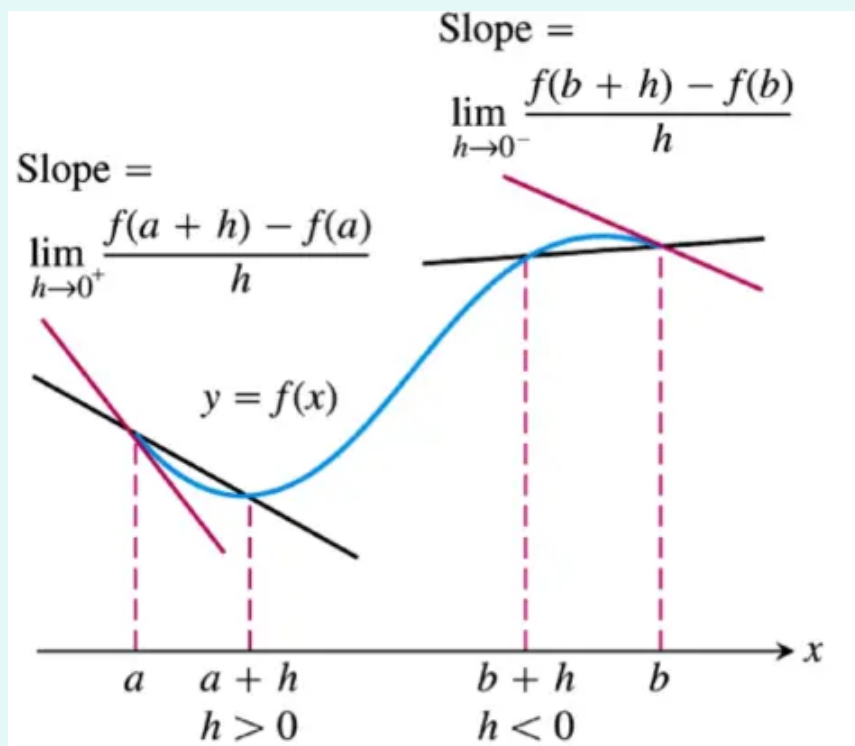
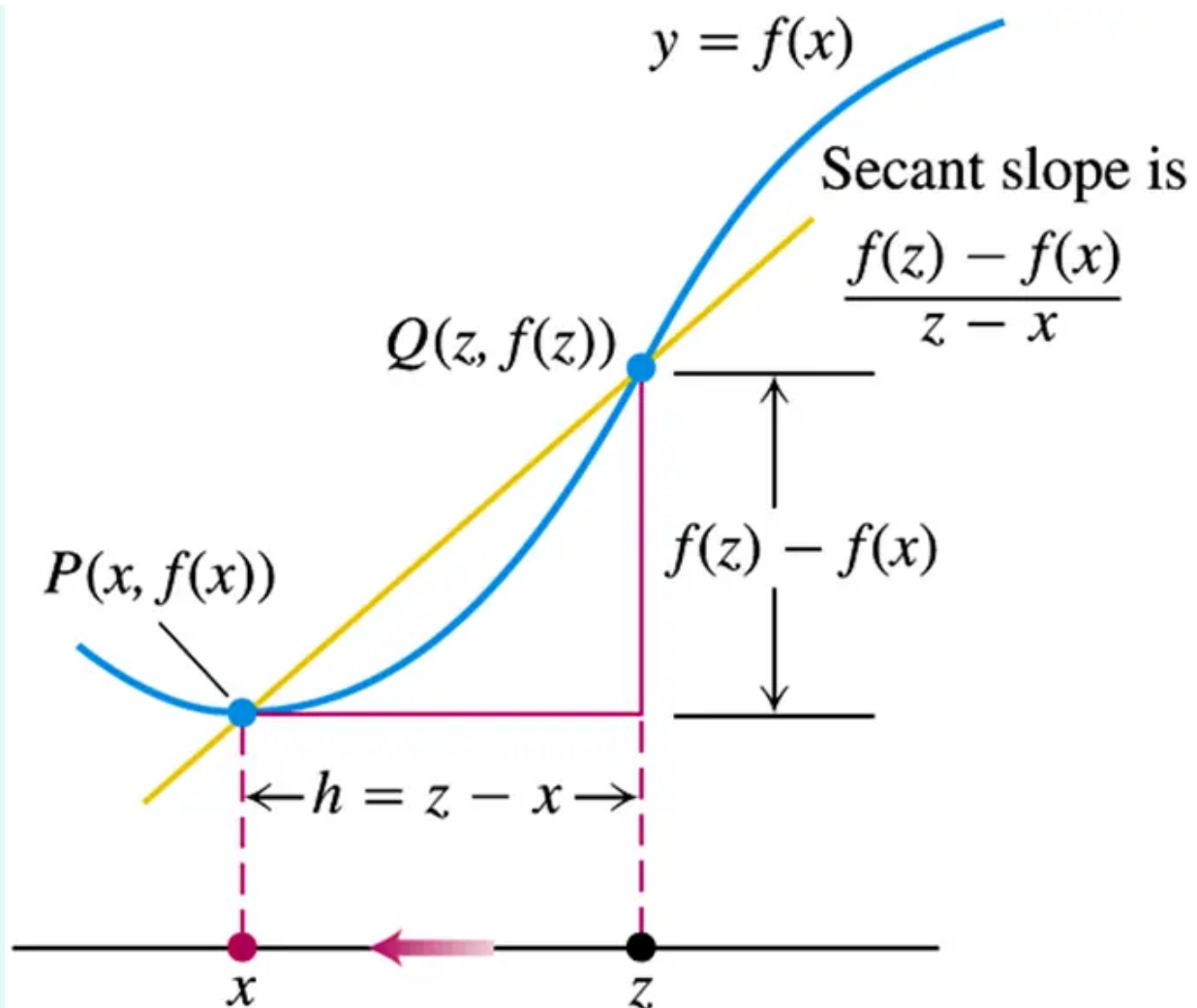


image 17 3.webp

Alternatieve formule voor de afgeleide

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$



Derivative of f at x is

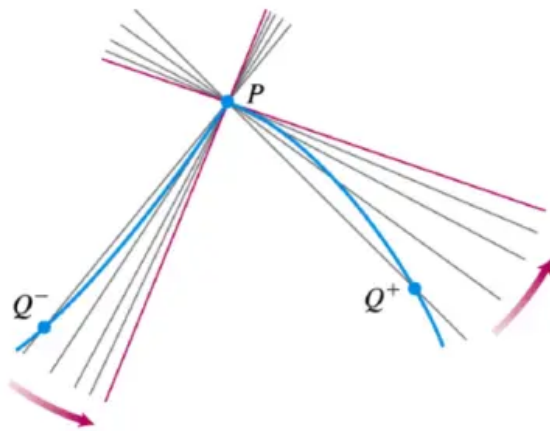
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

image 18.3.webp

🔗 Continue functies die geen afgeleiden hebben in P

1. a *corner*, where the one-sided derivatives differ.



2. a *cusp*, where the slope of PQ approaches ∞ from one side and $-\infty$ from the other.

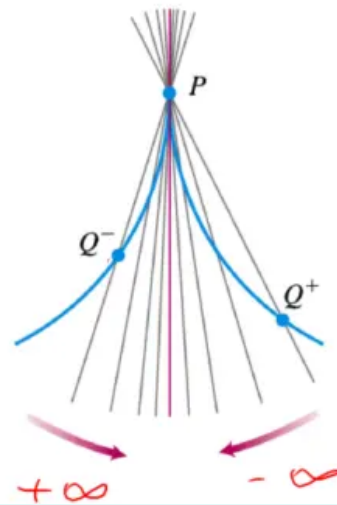


image 19 2.webp

3. a *vertical tangent*, where the slope of PQ approaches ∞ from both sides or approaches $-\infty$ from both sides (here, $-\infty$).

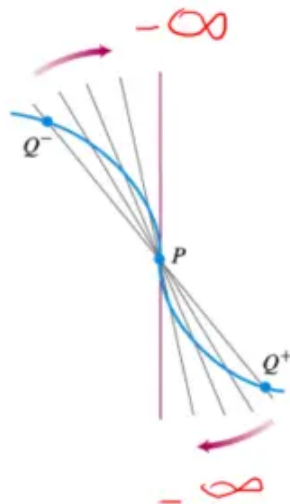


image 20 2.webp

Discontinue functies

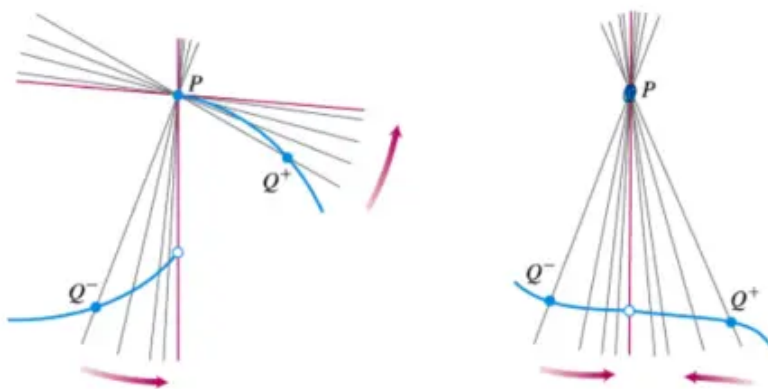


image 21 2.webp

Indien f differentieerbaar is in c dan is f continu in c (zonder bewijs)

🔗 Hogere orde afgeleiden

- Eerste orde afgeleide:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

- Tweede orde afgeleide:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

- n-de orde afgeleide:

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

3.2 Regels voor het afleiden

🔗 Als u en v differentieerbare functies zijn van f , dan gelden de volgende regels:

1. Afgeleide van een constante functie

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

2. Machregel

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

3. Rationale machten $\frac{d}{dx} x^{p/q} = \frac{p}{q} x^{p/q-1}$

4. Verm. met een constante $\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$

5. Som $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

6. Product $\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$

7. Quotient $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

3.3 Afgeleiden als snelheid van verandering

🔗 Ogenblikkelijke snelheid

De ogenblikkelijke snelheid van verandering van f met x in x_0 wordt gegeven door de afgeleide van f naar x

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

De versnelling a is de afgeleide van de snelheid naar de tijd : $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

3.4 Te kennen afgeleiden van standaardfuncties

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$f(x)$	$f'(x)$
---	---
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\text{Bgsin } x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Bgcos } x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{Bgtan } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{Bgcot } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

3.5 De kettingregel en parametervergelijkingen

Differentieerbaarheid van samengestelde functies

Indien $g(x)$ differentieerbaar is in x en $f(u)$ differentieerbaar in $g(x)$ dan is de samengestelde $y(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ differentieerbaar in x :

$$y'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Notatie van Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Inverse functies

De inverse functie kan men bekomen door de x en y in een voorschrift om te wisselen en de grafiek te spiegelen t.o.v. de bissectrice van de eerste kwadrant, de inverse bestaat indien elke horizontale lijn de grafiek hoogstens 1 maal snijdt (anders heb je meer dan 1 functiewaarde na het spiegelen, wat niet kan)

De afgeleide van een inverse functie is $\left. \frac{df^{-1}}{dx} \right|_{f(x)} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_a}$

Parametervergelijkingen

Als x en y functies zijn van een parameter t

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{voor } a \leq t \leq b$$

De punten $(x, y) = (f(t), g(t))$ vormen de kromme, $(f(a), g(a))$ is het startpunt en $(f(b), g(b))$ is het eindpunt van de kromme.

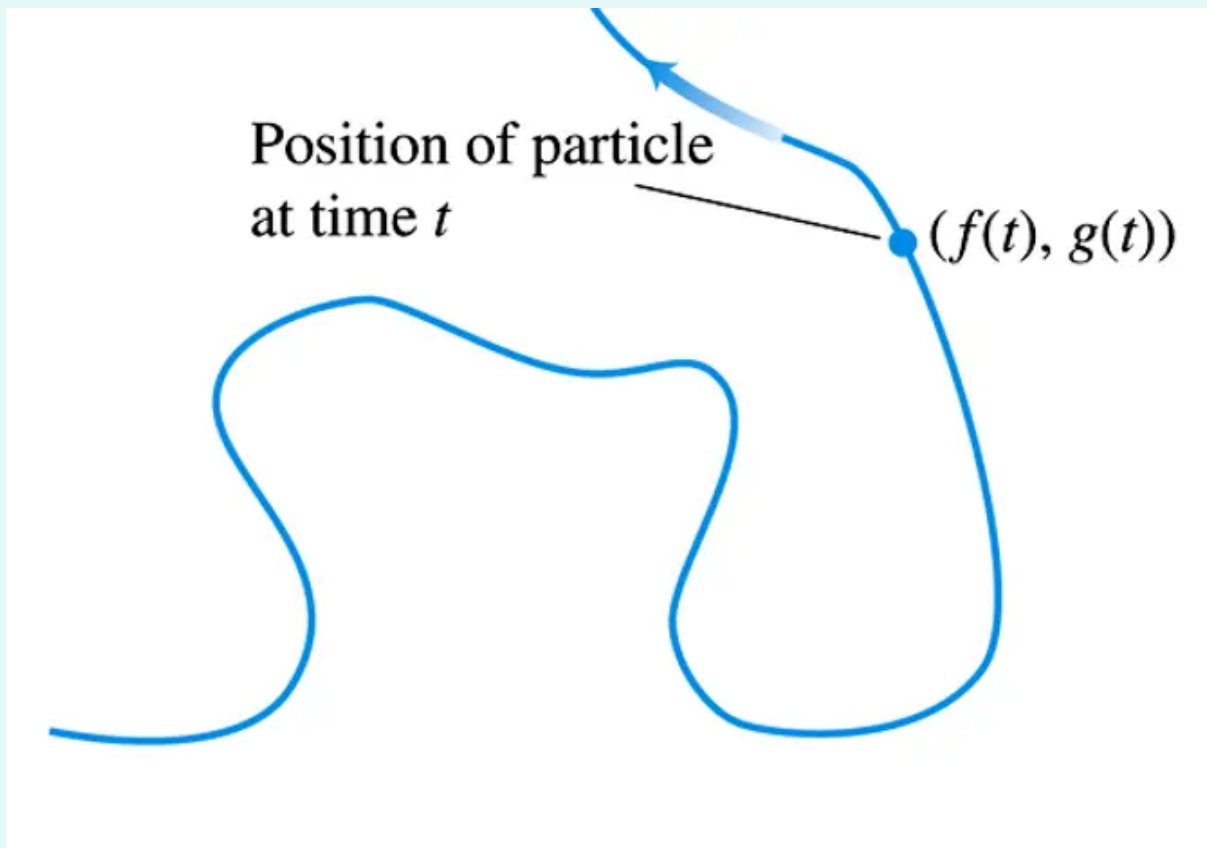


image 22.webp

Met een parametervergelijking kan je krommes beschrijven die geen functies zijn (= hebben meer dan 1 functiewaarde voor een bepaalde x)

Helling van de raaklijn aan een parametrische kromme

Als alle 3 afgeleiden bestaan en $dx/dt \neq 0$, dan geldt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Parametrische formule voor d^2y/dx^2 :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

🔗 Standaard parametervergelijkingen

- Cirkel: $x^2 + y^2 = a^2 \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- Ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
- Een functie $y = f(x)$: $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$

3.6 Impliciete afgeleiden

🔗 Impliciet gedefinieerde functies

De voorgaande methodes zijn toepasselijk als een functie $y = f(x)$ en een parametervergelijking gegeven is, echter kan men ook een *impliciet* gedefinieerde functie zoals $x^2 + y^2 = 25$ afleiden in een punt.

- Differentieer linker- en rechterlid naar x waarbij je y als een differentieerbare functie naar x beschouwt
- Los de bekomen uitdrukking op naar dy/dx

Hoofdstuk 4: Toepassingen van afgeleiden

4.1 Extrema van functies

🔗 Definitie van een absoluut minimum en maximum

Zij f een functie met domein D . f heeft een absoluut maximum in een punt c van D indien voor alle x in D geldt dat:

$$f(x) \leq f(c)$$

f heeft een absoluut minimum in een punt c van D indien voor alle x in D geldt dat:

$$f(x) \geq f(c)$$

- De absolute maxima en minima kunnen sterk variëren afhankelijk van het gekozen domein
- Elke continue functie f gedefinieerd op een gesloten interval bereikt op dit interval een absoluut minimum m en een absoluut maximum M

🔗 Definitie van een lokaal minimum en een lokaal maximum

Zij f een functie met domein D . f heeft een lokaal maximum in een inwendig punt c van D indien voor alle x in een open interval rond c geldt dat:

$$f(x) \leq f(c)$$

f heeft een lokaal minimum in een inwendig punt c van D indien voor alle x in een open interval rond c geldt dat:

$$f(x) \geq f(c)$$

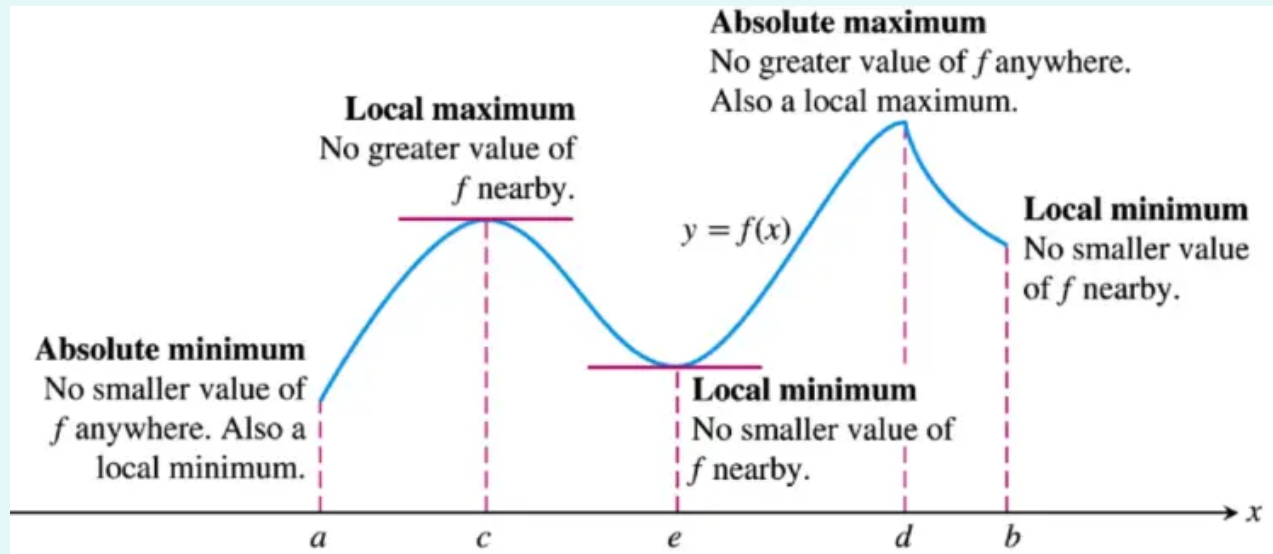


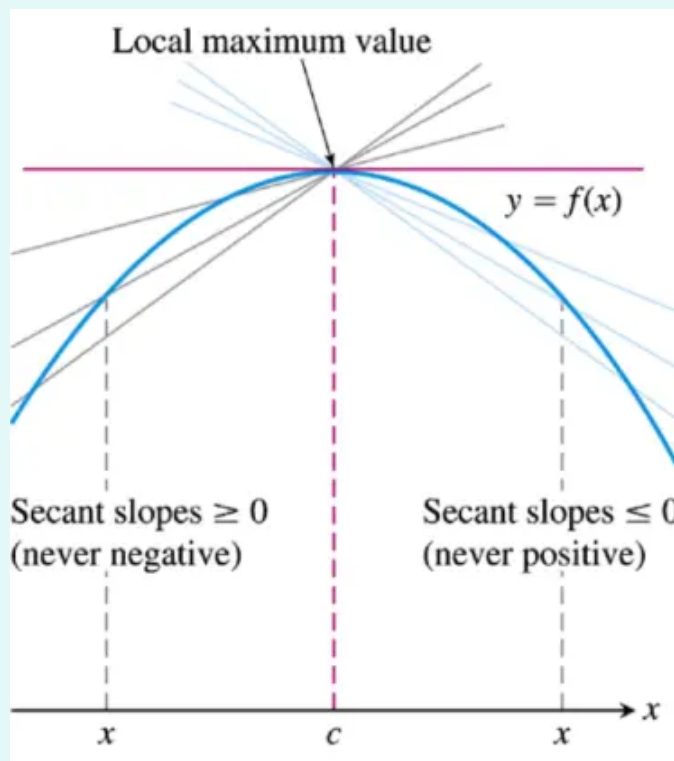
image 23.webp

Algemene classificatie van maxima en minima

🔗 Eerste afgeleide stelling voor lokale extrema

Indien f een lokaal minimum of maximum heeft in een inwendig punt c van haar domein en indien f' gedefinieerd is in c dan geldt dat:

$$f'(c) = 0$$



🔗 Kritisch punt

Een inwendig punt c van het domein van een functie f met $f'(c) = 0$ of waarin f' niet bestaat wordt een kritisch punt genoemd. (niet altijd een lokaal min. of max.)

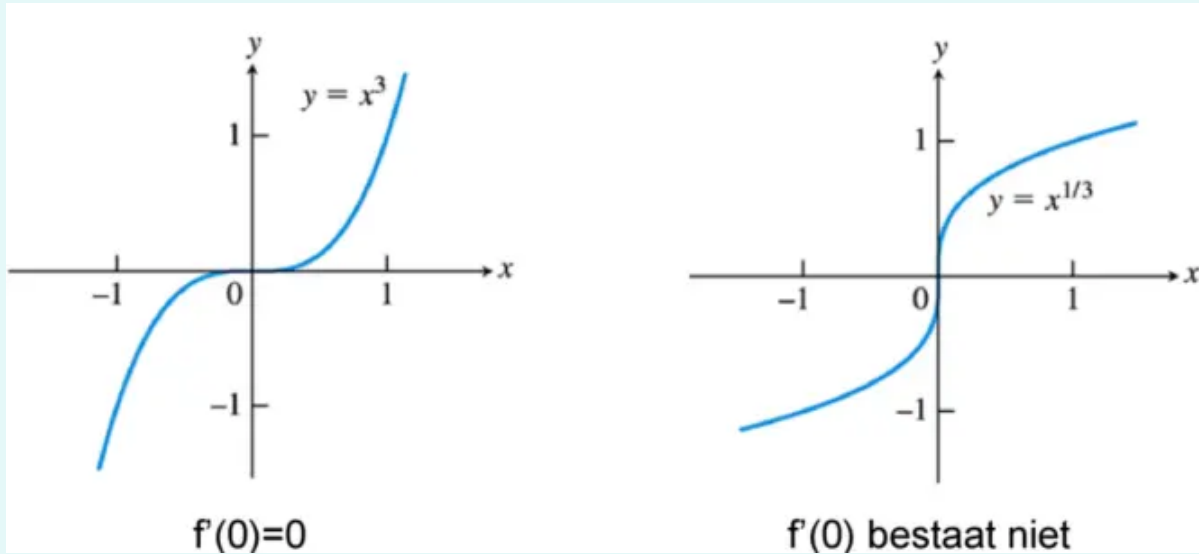


image 25.webp

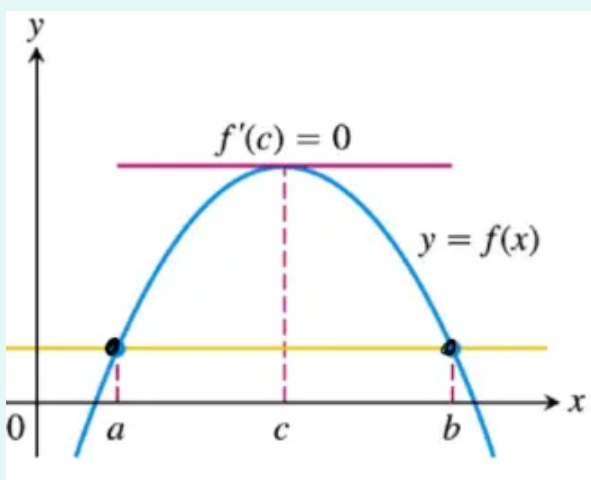
🔗 Stappenplan voor het berekenen van absolute minima/maxima van een continue functie op een eindig gesloten interval

1. Bereken f in alle kritische punten en de beide eindpunten
2. Neem de grootste en/of de kleinste

4.2 De middelwaardestelling

🔗 Theorema van Rolle

Indien $f(x)$ continu is in $[a, b]$ en differentieerbaar in $]a, b[$ en indien $f(a) = f(b)$ dan bestaat er een getal c in $]a, b[$ waarvoor geldt dat $f'(c) = 0$



opm: de voorwaarden van continuïteit op $[a, b]$ en afleidbaarheid op $]a, b[$ zijn essentieel

🔗 Middelwaardestelling

Indien $f(x)$ continu is in $[a, b]$ en differentieerbaar in $]a, b[$, dan bestaat er minstens een getal c in $]a, b[$ waarvoor geldt dat:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

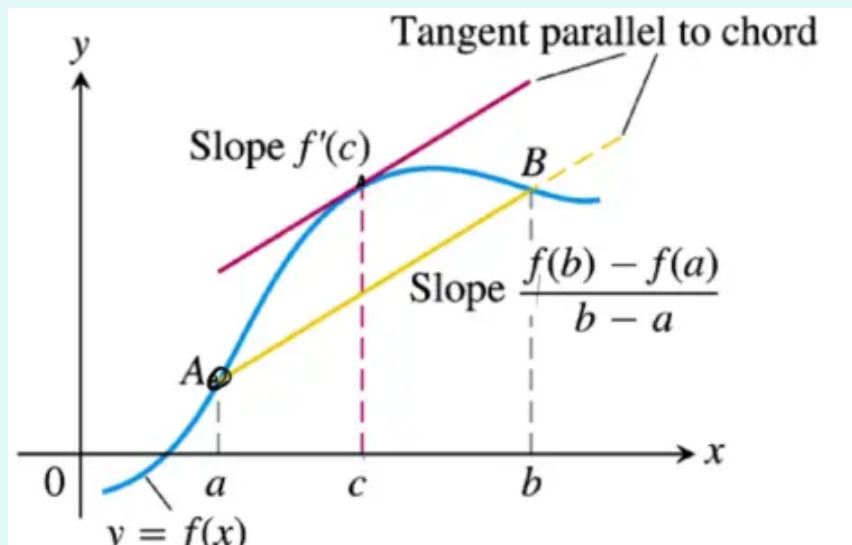


image 27.webp

- Gevolg 1: Functies waarvan de afgeleide op een open interval $]a, b[$ overal 0 is, zijn constant op dit interval.
- Gevolg 2: Functies met dezelfde afgeleide op een open interval met $]a, b[$ zijn op een constante na gelijk op dit. (m.a.w., $f' = g' \rightarrow (f - g)' = 0 \rightarrow f - g = cst$)

4.3 Monotone functies en de eerste afgeleide test

🔗 Stijgende en dalende functies

Zij f een functie gedefinieerd op een interval I en x_1 en x_2 twee punten in I .

1. Als $f(x_1) < f(x_2)$ wanneer $x_1 < x_2$, dan is f stijgend op I .
2. Als $f(x_1) > f(x_2)$ wanneer $x_1 < x_2$, dan is f dalend op I .

Een functie die stijgt of daalt in een interval I heet monotoon.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \rightarrow f \text{ is strikt stijgend} \\ f(x_1) \leq f(x_2) \rightarrow f \text{ is stijgend} \\ f(x_1) > f(x_2) \rightarrow f \text{ is strikt dalend} \\ f(x_1) \geq f(x_2) \rightarrow f \text{ is dalend} \end{cases}$$

🔗 Eerste afgeleide test voor monotone functies

Zij f continu op $[a, b]$ en afleidbaar op $]a, b[$ dan geldt het volgende:

- Indien $f'(x) > 0$ in elk punt van $]a, b[$ dan is f stijgend op $]a, b[$
- Indien $f'(x) < 0$ in elk punt van $]a, b[$ dan is f dalend op $]a, b[$.

Eerste afgeleide test voor lokale extrema

Zij c een kritisch punt van een continue functie f en zij f differentieerbaar in elk punt van een interval rond c , behalve eventueel in c zelf. Dan geldt:

1. Als f' van negatief verandert naar positief, dan heeft f een lokaal minimum in c .
2. Als f' van positief verandert naar negatief, dan heeft f een lokaal maximum in c .
3. Als f' niet van teken verandert in c , dan heeft f geen lokaal extremum in c .

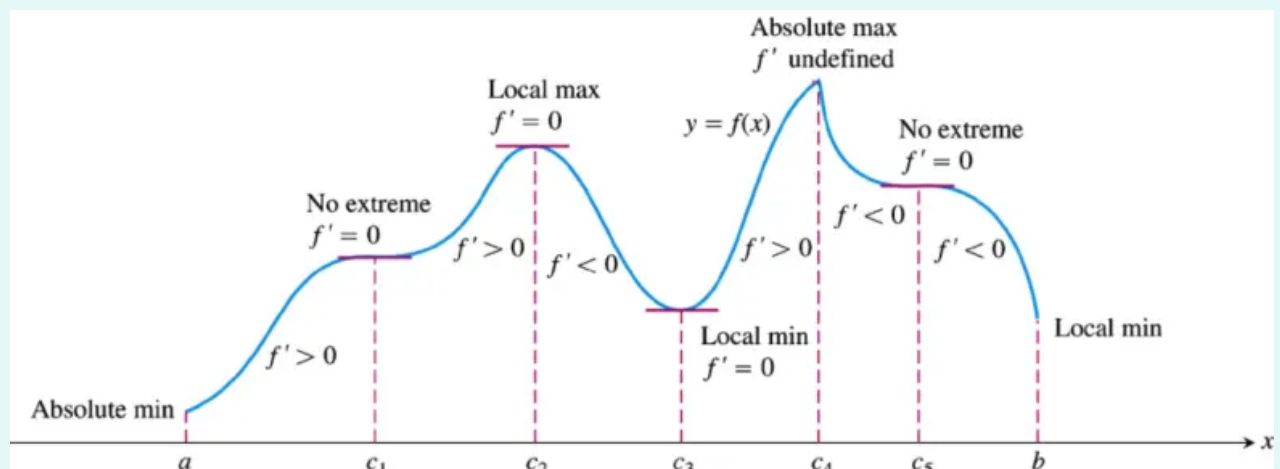


image 28.webp

4.4 Concaviteit en het schetsen van een grafiek

Definitie van concaaf boven en concaaf onder

De grafiek van een afleidbare functie $y = f(x)$ is

- Concaaf boven op een open interval I indien f' stijgt op I
- Concaaf onder op een open interval I indien f' daalt op I

De tweede afgeleide test voor concaviteit

Zij f tweemaal differentieerbaar op I . Dan geldt:

- f is boven concaaf op I als $f'' > 0$ op I
- f is onder concaaf op I als $f'' < 0$ op I

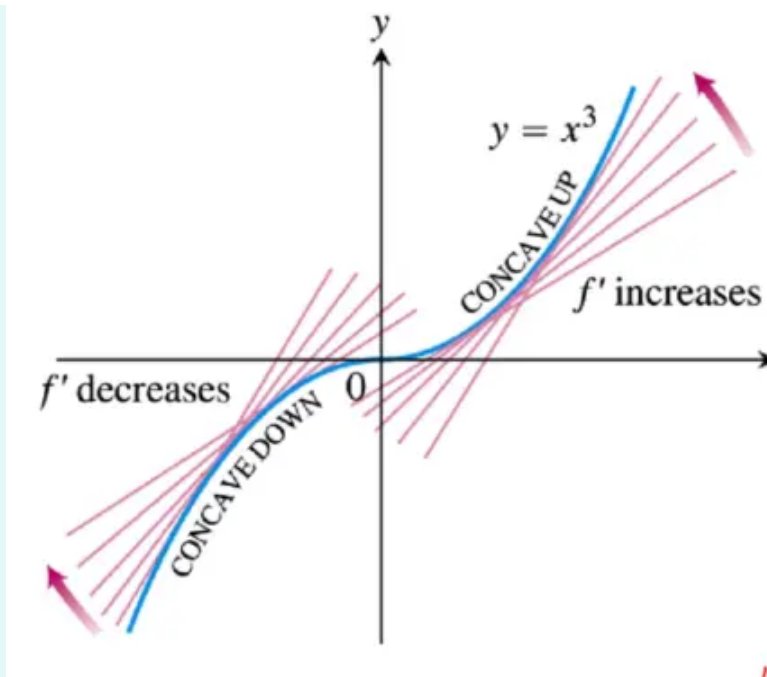


image 29.webp

Definitie van een buigpunt

Een buigpunt is een punt, waar de functie een raaklijn heeft en van concaviteit verandert.

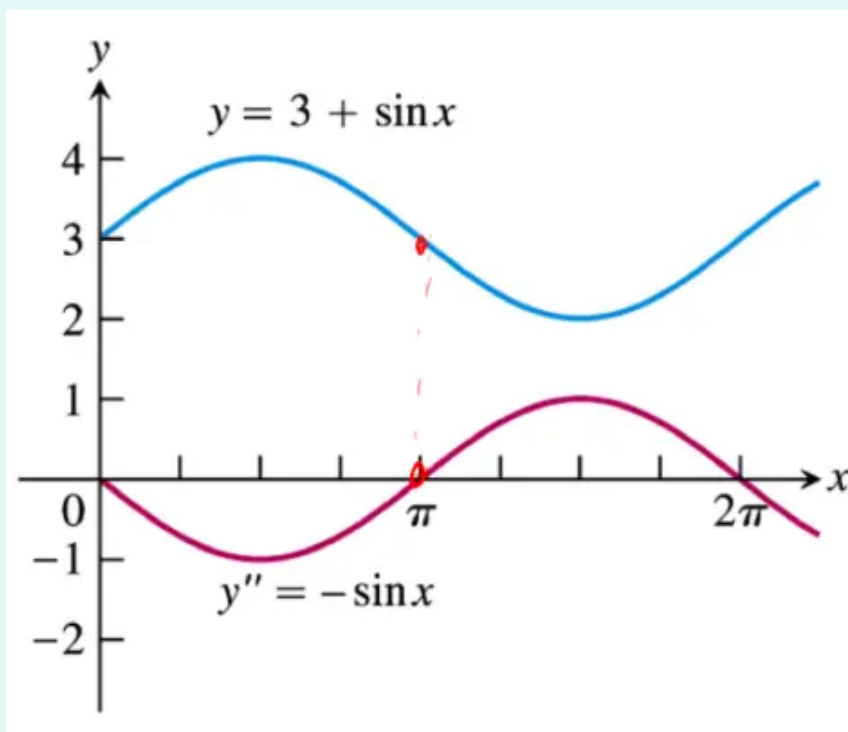


image 30.webp

De concaviteit kan bepaald worden door y''

Tweede afgeleide test voor lokale extrema

Zij f'' continu op een open interval rond $x = c$, dan geldt:

1. Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) < 0$ dan heeft f een lokaal maximum in c

2. Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) > 0$ dan heeft f een lokaal minimum in c
3. Als $f'(c) = 0$ en $f''(c) = 0$ dan weten we niets

Stappenplan om $y = f(x)$ te schetsen

1. Bepaal het domein en eventuele symmetrieën
2. Bereken y' en y''
3. Zoek de kritische punten van f en bepaal het gedrag in deze punten
4. Bepaal de punten waar de functie stijgt en daalt, zoek de buigpunten en bepaal de concaviteit
5. Identificeer de asymptoten indien die bestaan

4.5 Toegepaste optimalisatie problemen

Stappenplan

1. Lees het probleem tot je het begrijpt. Wat is er gegeven? Welke hoeveelheid moet er geoptimaliseerd worden?
2. Teken een figuur
3. Introduceer variabelen, probeer elke relatie in de foto als een algebraïsche expressie te schrijven, en kies de variabele waar je de vergelijking naar moet oplossen
4. Schrijf de vergelijking voor de variabele. Als er meer dan 1 veranderlijke is kan je parametervergelijkingen schrijven
5. Test de kritische punten en uiteinden van het domein, gebruik de eerste en tweede afgeleiden om de kritische punten te classificeren (= absoluut max/min bepalen)

4.6 Onbepaalde vormen en de regel van l'Hopital

De eerste vorm van de regel van l'Hopital

Beschouw 2 functies f en g . Stel dat $f(a) = g(a) = 0$ en dat $f'(a)$ en $g'(a)$ bestaan met $g'(a) \neq 0$, dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

De sterke vorm van de regel van l'Hopital

Beschouw 2 functies f en g . Stel dat $f(a) = g(a) = 0$ en dat f en g differentieerbaar zijn op een open interval I rond a en dat $g'(x) \neq 0$ op I als $x \neq a$. Dan geldt:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Indien de limiet in het rechterlid bestaat.

Toepassingen: linker- en rechterlimieten, onbepaalde vormen zoals ∞/∞ en onbepaalde machten zoals 0^0

4.8 Primitieve functies en onbepaalde integralen

🔗 Primitieve functie

Een functie $F(x)$ is een primitieve functie van een functie $f(x)$ als:

$$F'(x) = f(x)$$

en dit voor alle x -waarden van het domein van f .

🔗 Definitie onbepaalde integraal

De verzameling van alle primitieve functies van een functie f noemen we de onbepaalde integraal van f en noteren we

$$\int f(x) dx$$

met f het integrandum en x de integratievariabele

🔗 Rekenregels voor primitieve functies

Verm. met constante	$kf(x)$	$kF(x) + C$
Negativiteit	$-f(x)$	$-F(x) + C$
Som en verschil	$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$

Te kennen onbepaalde integralen

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \quad (a \neq -1)$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a \neq 1)$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

Hoofdstuk 5: Integratie

5.1 Het schatten van een oppervlakte met eindige sommen

De oppervlakte van een functie kan door balkjes in bepaalde intervallen te zetten en de som van hun oppervlaktes te berekenen, hoe meer intervallen hoe dichter de sommen bij elkaar liggen en de oppervlakte benaderen. De sommen zijn gelijk aan de oppervlakte in de limiet voor het aantal intervallen gaande naar oneindig.

5.2 Sigmer notatie en sommaties

Notatie

De sommatie wordt als volgt geschreven:

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

Met k de index waar de som begin, a_k voor de k -de term en de stopconditie n

Rekenregels voor eindige sommen

1. Som: $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
2. Verschil: $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$
3. Verm. met constante: $\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$
4. Constante waarde: $\sum_{k=1}^n c = n \cdot c$

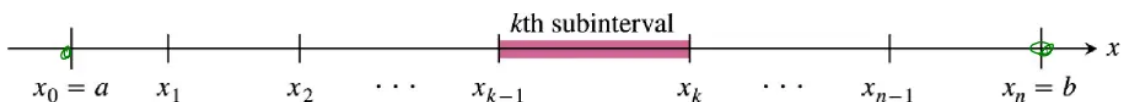
Bekende sommen

- De som van de getallen van 1 tot en met n : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- De som van de machten van 1 tot en met n : $\sum_{k=1}^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

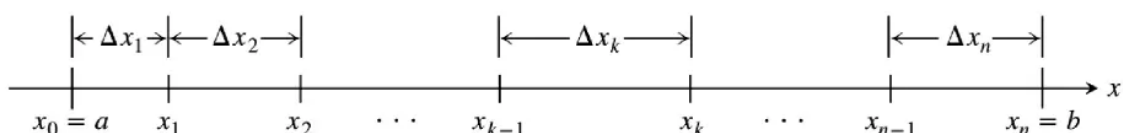
Partitie

Een partitie van het interval $[a, b]$ is een verzameling punten $P = \{a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b\}$ met $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$ (notatie $a = x_0$ en $b = x_n$)

The first of these subintervals is $[x_0, x_1]$, the second is $[x_1, x_2]$, and the k th subinterval of P is $[x_{k-1}, x_k]$, for k an integer between 1 and n .



The width of the first subinterval $[x_0, x_1]$ is denoted Δx_1 , the width of the second $[x_1, x_2]$ is denoted Δx_2 , and the width of the k th subinterval is $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. If all n subintervals have equal width, then the common width Δx is equal to $(b - a)/n$.



De Riemann som van f op $[a, b] = S_p$ met

$$S_p = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

De norm van een partitie P is de breedte van het grootste subinterval van die partitie = $\|P\|$

5.3 De bepaalde integraal

Definitie

Zij f een functie gedefinieerd op een interval $[a, b]$ en zij P een willekeurige partitie van $[a, b]$. Zij c_k willekeurige punten in de subintervallen $[x_{k-1}, x_k]$. Indien de volgende limiet bestaat:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I$$

en onafhankelijk van de gekozen partitie en van de gekozen punten, dan zeggen we dat f integreerbaar is op $[a, b]$ en we noemen I e bepaalde integraal van f over $[a, b]$.

We zeggen dat de Riemann som convergeert naar de bepaalde integraal en dat f integreerbaar is over $[a, b]$. Notatie:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Alle continue functies zijn integreerbaar.

Rekenregels integralen

1. Volgorde van integratie:

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

2. De nul-interval:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

1. Vermenigvuldiging met een constante:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b -f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

1. Som en verschil:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

1. Additiviteit:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

1. Min-max ongelijkheid: Als f een maximum- en minimumwaarde heeft, dan geldt:

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max f \cdot (b - a)$$

1. Dominantie:

$$f(x) \geq g(x) \text{ op } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)$$

🔗 Gemiddelde waarde van een arbitraire continue functie

Als f integreerbaar is op $[a, b]$ dan wordt de gemiddelde waarde van f op het interval $[a, b]$ gedefinieerd als

$$\text{gem}(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Van een halve cirkel $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ op $[-2, 2]$ is $\pi/2$ de gemiddelde waarde

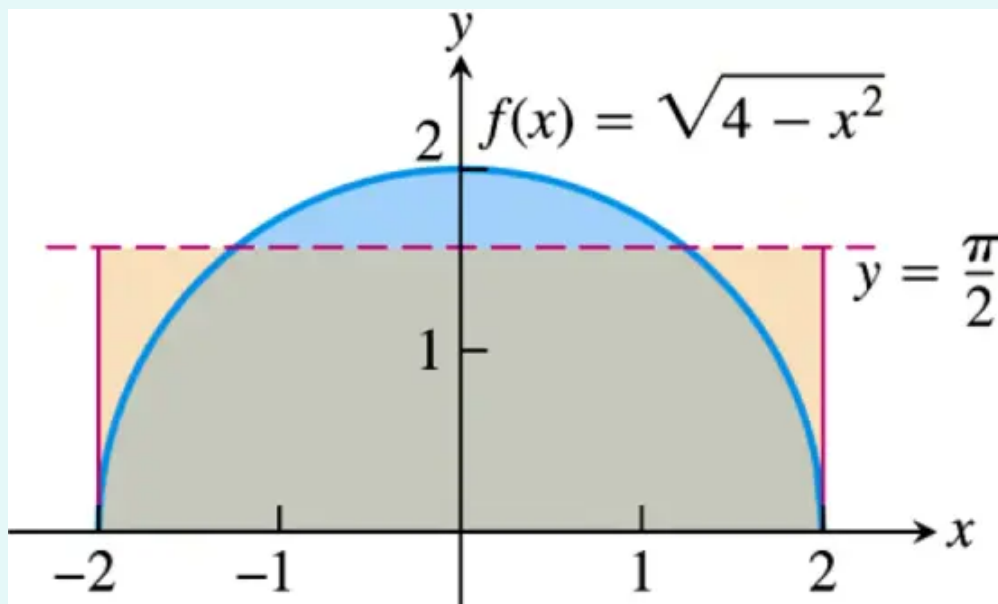


image 32.webp

5.4 Het fundamentele theorema van de Calculus

🔗 Het middelwaarde theorema voor bepaalde integralen

Als f continu is op $[a, b]$, $\exists c \in [a, b]$ zodat:

$$F(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

🔗 Fundamentele stelling van de calculus

Indien f continu is op $[a, b]$ dan is de functie $F(x)$ gedefinieerd als:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

continu en heeft tevens een afgeleide in elk punt van het interval $]a, b[$ gegeven door:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Zij f continu op $[a, b]$ en zij F een primitieve functie van f op $[a, b]$ dan geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x) \Big|_a^b$$

🔗 Integratie formules (belangrijk!)

Partiele integratie:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)] - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Integratie door substitutie:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du \text{ met } \begin{cases} \alpha = g(a) \\ \beta = g(b) \end{cases}$$

🔗 Symmetrie regels

- Als f even is, dan geldt $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- Als f oneven is, dan geldt $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

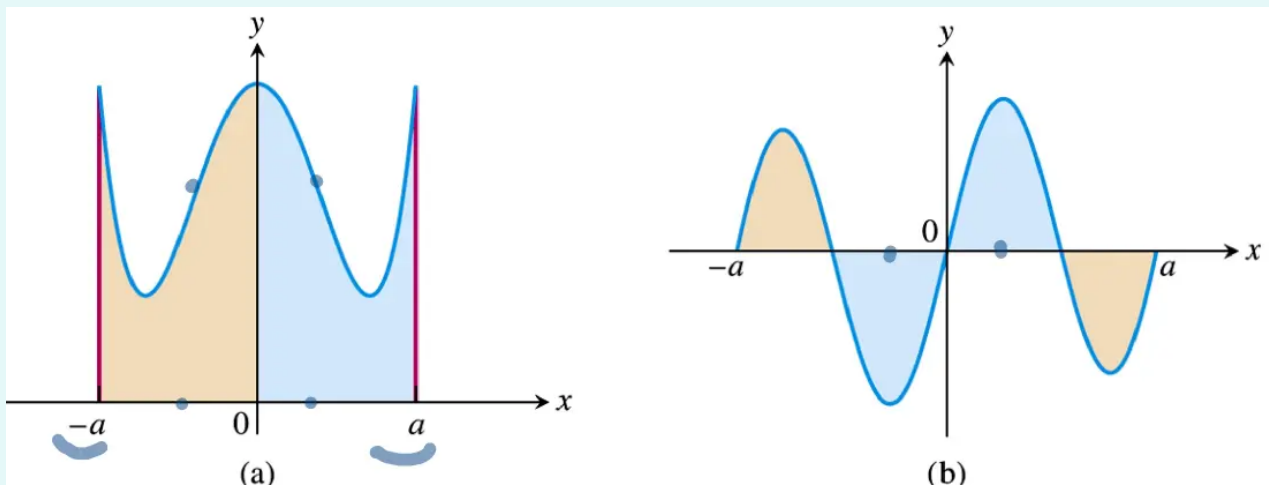


image 33.webp

5.6 Oppervlakte tussen krommes

Indien f en g continu zijn met $f(x) \geq g(x)$ op het interval $[a, b]$ dan wordt de oppervlakte tussen beide krommes $y = f(x)$ en $y = g(x)$ tussen a en b gegeven door de integraal van $f - g$ tussen a en b :

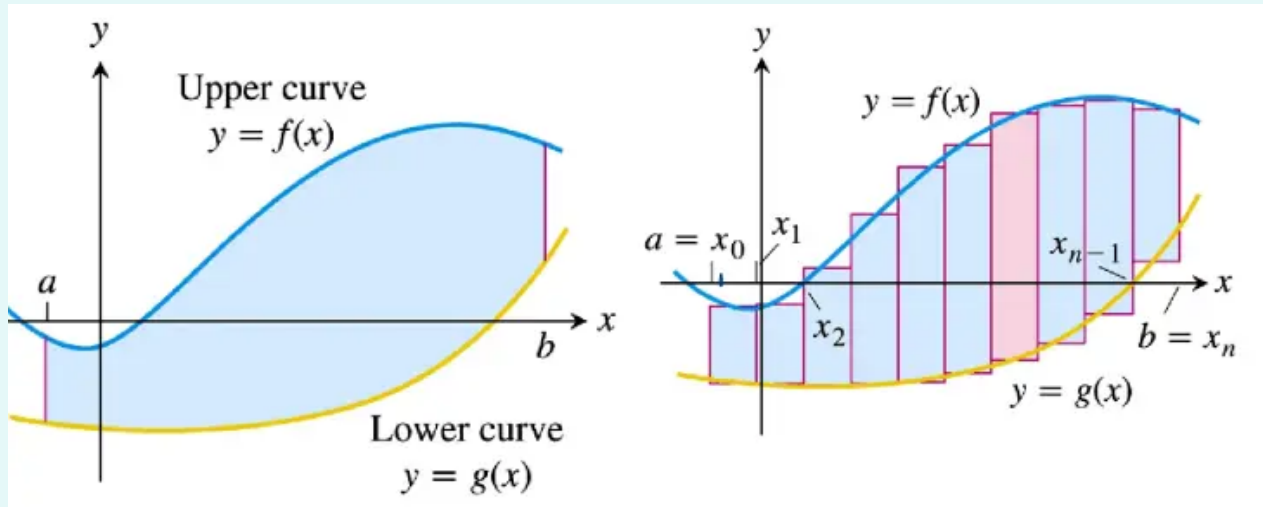


image 34.webp

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Voor integraties met respect naar y ipv x gebruiken we de formule

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

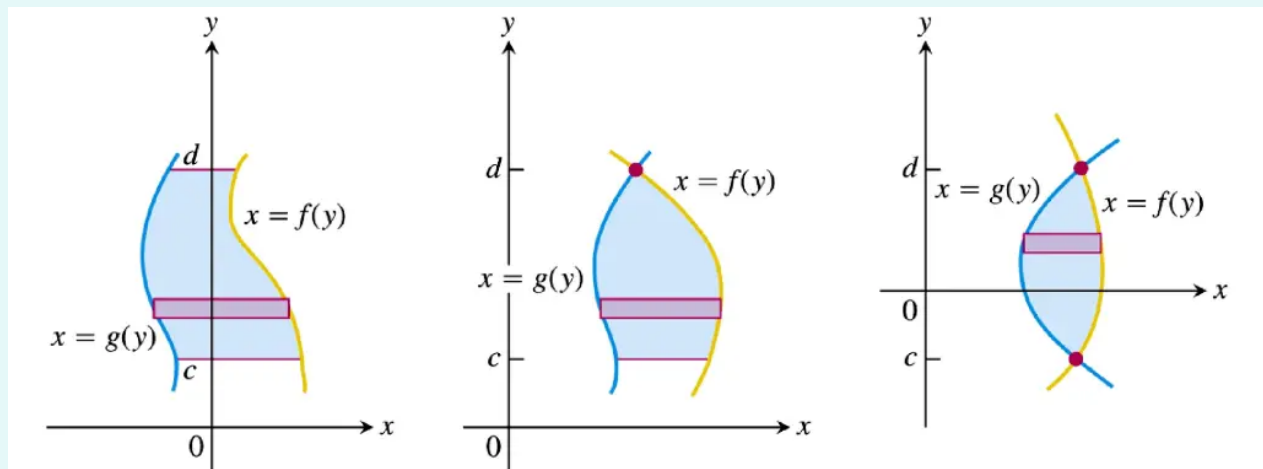


image 35.webp

6. Differentiaalvergelijkingen