

[1] Bereken de volgende limiet:

3 punten

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$$

$$= \frac{0}{0}$$

dus we mogen de
regel van l'Hopital
toepassen

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x \cos(x)}$$

$$= \frac{1-1}{0+0} = \frac{0}{0}$$

dus opnieuw
l'Hopital

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x \sin(x)}$$

$$= \frac{0}{1+1-0} = 0$$

[2] Veronderstel dat y als impliciete functie van x
bepaald wordt door de vergelijking

$$y^3 + xy - 8 = 0$$

(a) Bereken $\frac{dy}{dx}$

(b) Bepaal de vgl. v.d. raaklijn aan
deze functie in het punt $(0, 2)$

3 punten

$$(a) \frac{d}{dx} (y^3 + xy - 8) = \frac{d}{dx} (0)$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 \frac{dy}{dx} + 1 \cdot y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} (3y^2 + x) = -y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{3y^2 + x}$$

(b) raaklijn: $y = ax + b$, We zoeken a en b mog.

$$a = \frac{dy}{dx}(0)$$

(want in het punt $(0, 2)$ wordt de rico van de raaklijn gegeven door $\frac{dy}{dx}(0)$)

$$= \frac{-y(0)}{3y(0)^2 + 0}$$

$$= \frac{-2}{3 \cdot 2^2} \quad (\text{want } y(0) = 2)$$

$$= -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + b$$

Nu bepalen we b door het punt $(0, 2)$ in te vullen in de formule:

$$2 = y(0) = -\frac{1}{6} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 2$$

Het voorschrift van de gezochte raaklijn is: $y = -\frac{1}{6}x + 2$

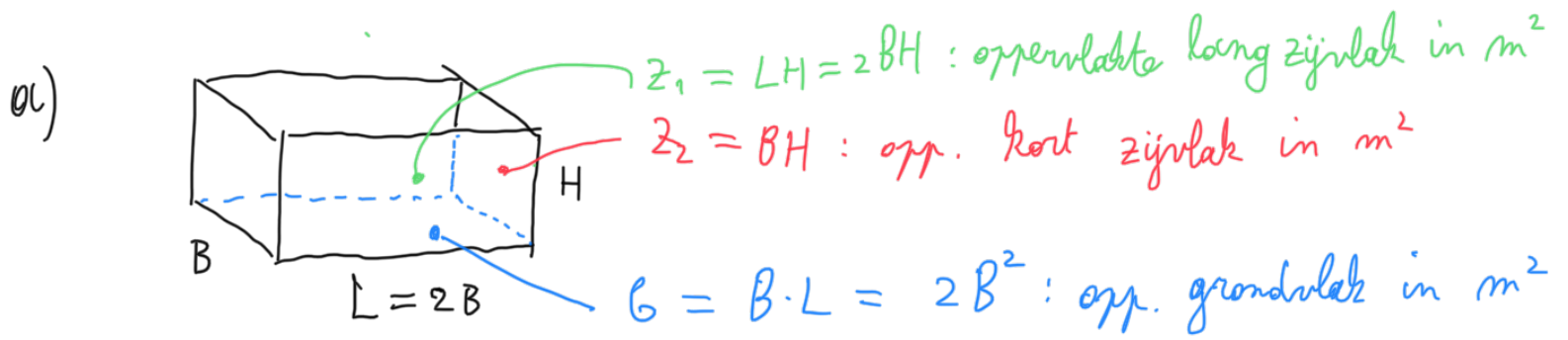
[3] Een balkvormige container zonder deksel heeft een vast volume van 12 m^3 . De lengte van het grondvlak is dubbel zo groot als de breedte van het grondvlak.

Het materiaal om de onderkant te maken kost $5 \frac{\text{€}}{\text{m}^2}$.

Het materiaal om de zijvlakken te maken kost $15 \frac{\text{€}}{\text{m}^2}$.

- Maak een figuur waar je alle nodige variabelen op aanduidt
- Stel het voorschrift op van de prijs in functie van een gekozen variabele
- Bepaal de afmetingen v.d. doos zodat de prijs minimaal is
- Bepaal de minimale prijs

5 punten



b) Neem B als variabele.

$$12 = V = BLH = B \cdot 2B \cdot H \quad \Leftrightarrow H = \frac{6}{B^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_2 = B \cdot H = \frac{6}{B} \\ z_1 = L \cdot H = 2B \cdot \frac{6}{B^2} = \frac{12}{B} \\ G = 2B^2 \end{cases}$$

We hebben nu de opp. van de vlakken uitgedrukt in functie van B

$$\begin{aligned} P &= 15(2z_1 + 2z_2) + 5G \\ &= 30\left(\frac{6}{B} + \frac{12}{B}\right) + 10B^2 \\ &= \frac{540}{B} + 10B^2 \end{aligned}$$

P : de prijs van de deors in euro

c) We bepalen eerst de afgeleide van P : $P'(B) = -\frac{540}{B^2} + 20B$

Dan bepalen we de kritische punten van P :

- $B=0$ is een kritisch punt, maar dat doet er niet toe want wij zijn enkel geïnteresseerd in het geval $B > 0$. (Doors met negatieve afmetingen bestaat niet)

$$P'(B) = 0 \Leftrightarrow -\frac{540}{B^2} + 20B = 0 \Leftrightarrow 20B = \frac{540}{B^2} \Leftrightarrow B^3 = \frac{540}{20} \Leftrightarrow B = 3$$

- Als $B \in]0, 3[$, dan is $P'(B) < 0 \Rightarrow P(B)$ daalt

- Als $B \in]3, +\infty[$, dan is $P'(B) > 0 \Rightarrow P(B)$ stijgt

($B=3$ is het enige nulpunt van P in $\mathbb{R}_0^+$ dus er zijn geen andere tekenswissels omdat P continu is op $\mathbb{R}_0^+$)

$\Rightarrow P(B)$, de prijs van de deors, bereikt een absoluut minimum in $B=3$

$$\Rightarrow B=3, L=2B=6, H=\frac{6}{B^2}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3} \quad (\text{in meter})$$

d) $P(3) = \frac{540}{3} + 10 \cdot 3^2 = 180 + 90 = 270$

De kostprijs bedraagt 270 €.

[4] Bereken de integraal

$$\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{\theta^2} \sin\left(\frac{1}{\theta}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{\theta}\right) d\theta = * \quad 3 \text{ punten}$$

We gebruiken substitutie. Stel $u = \frac{1}{\theta} \Rightarrow du = -\frac{1}{\theta^2} d\theta$
Nu passen we de grenzen van de integraal aan:

$$\theta = \frac{1}{\pi} \Rightarrow u = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{(1/\pi)} = \pi \quad \text{en} \quad \theta = \frac{2}{\pi} \Rightarrow u = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{(2/\pi)} = \frac{\pi}{2}$$

$$* = - \int_{\pi}^{\pi/2} \sin(u) \cos(u) du$$

We gebruiken substitutie. Stel $t = \sin(u) \Rightarrow dt = \cos(u) du$

grenzen: $u = \pi \Rightarrow t = 0$ en $u = \pi/2 \Rightarrow t = 1$

$$= - \int_0^1 t dt = - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

[5] Los het volgende beginwaarde probleem op:

$$z'' + 10z' + 41z = 4e^{-5x} \quad z(0) = 1 \quad z'(0) = 0$$

6 punten

1) classificatie: gewone DV, lineair, inhomogeen, orde 2

2) standaardvorm: $z'' + 10z' + 41z = 4e^{-5x}$

3) homogene oplossing:

We bepalen eerst de wortels van de karakteristieke vgl:

$$m^2 + 10m + 41 = 0$$

$$\Rightarrow D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 41 = 100 - 164 = -64$$

De discriminant is kleiner dan 0, dus de homogene opl. z_h heeft de vorm:

$$z_h(x) = C_1 e^{\lambda x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\lambda x} \sin(\beta x)$$

waarbij:

$$\lambda = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5 \quad \text{en} \quad \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Rightarrow z_h(x) = C_1 e^{-5x} \cos(4x) + C_2 e^{-5x} \sin(4x)$$

4) particuliere oplossing: $z_p(x) = A \cdot e^{-5x}$ omdat $m = -5$ geen oplossing is van de karakteristieke vergelijking.

Hier is A een constante die we nog moeten bepalen door z_p in te vullen in de originele vgl.:

Voorbereidend werk:

$$z_p' = -5A e^{-5x} \quad \text{en} \quad z_p'' = 25A e^{-5x}$$

Invullen:

$$25A e^{-5x} - 50A e^{-5x} + 41A e^{-5x} = 4 e^{-5x}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e^{-5x}} \cdot A (25 - 50 + 41) = 4 \cancel{e^{-5x}}$$

$$\Leftrightarrow 16A = 4 \quad \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow z_p(x) = \frac{1}{4} e^{-5x}$$

$$\Rightarrow z = z_h + z_p = C_1 e^{-5x} \cos(4x) + C_2 e^{-5x} \sin(4x) + \frac{1}{4} e^{-5x}$$

5) beginwaarden: $z(0) = 1$
 $z'(0) = 0$

$$z' = -5C_1 e^{-5x} \cos(4x) - 4C_1 e^{-5x} \sin(4x) - 5C_2 e^{-5x} \sin(4x) + 4C_2 e^{-5x} \cos(4x) - \frac{5}{4} e^{-5x}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= z(0) = c_1 + \frac{1}{4} \\ 0 &= z'(0) = -5c_1 + 4c_2 - \frac{5}{4} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} \\ 5c_1 + \frac{5}{4} = 4c_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} \\ \left(\frac{15}{4} + \frac{5}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = c_2 \end{cases}$$

b) eind antwoord

$$z(x) = \frac{3}{4} \cos(4x) e^{-5x} + \frac{5}{4} \sin(4x) e^{-5x} + \frac{1}{4} e^{-5x}$$