

# Wiskunde: calculus en lineaire algebra

## Examen Calculus juni 2016: oplossingen oefeningen deel 1 en 2

---

### Reeks $\alpha_1$

1. Bepaal de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$$

#### Oplossing

Voor  $x > 1$  geldt  $|x-1| = x-1$ , zodat:

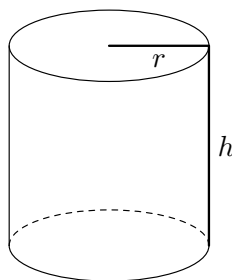
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x} \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{2x} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Wat zijn de afmetingen (straal, hoogte) van een cilindervormig blikje met een volume van  $125 \text{ cm}^3$  als we de totale oppervlakte (cilindermantel, bodem, deksel) van het blikje zo klein mogelijk willen?

*Illustreer de opgave a.d.h.v. een schets.*

#### Oplossing

De totale cilinderoppervlakte bestaat uit bodem en deksel (elk  $\pi r^2$ ) en de zijdelingse manteloppervlakte ( $2\pi r h$ ); we zoeken dus het minimum van  $S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ .



Indien het totale volume  $125 \text{ cm}^3$  bedraagt, volgt uit  $V = \pi r^2 h$  dat  $125 = \pi r^2 h$  waaruit:

$$h = \frac{125}{\pi r^2}$$

Substitutie hiervan in  $S(r, h)$  levert:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{125}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{250}{r}$$

We zoeken  $r \geq 0$  zodat  $S(r)$  minimaal is en bepalen daarvoor de nulpunten van de afgeleide  $S'(r)$ :

$$S'(r) = 0 \iff 4\pi r - \frac{250}{r^2} = 0 \iff r^3 = \frac{125}{2\pi} \iff r = \frac{5}{\sqrt[3]{2\pi}}$$

Aan de hand van de tweede afgeleide controleren we de aard van het extremum. Omdat  $S''(r) = 4\pi + \frac{500}{r^3}$  geldt duidelijk  $S''(r) > 0$  als  $r \geq 0$  zodat het een minimum betreft. We bepalen de bijhorende waarde van  $h$ :

$$h = \frac{125}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{125}{\pi} \left( \frac{\sqrt[3]{2\pi}}{5} \right)^2 = \frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{\pi}}$$

Antwoord: de totale cilinderoppervlakte is minimaal bij een straal van  $\frac{5}{\sqrt[3]{2\pi}}$  cm en een hoogte van  $\frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{\pi}}$  cm.

3. Los volgende differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde op:

$$\theta \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta - y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

### Oplossing

De differentiaalvergelijking is een eerste orde, lineaire, niet-homogene differentiaalvergelijking met  $y$  als afhankelijke en  $\theta$  als onafhankelijke variabele; we zoeken dus  $y(\theta)$ . We brengen de differentiaalvergelijking eerst in standaardvorm:

$$\frac{dy}{d\theta} + \frac{y}{\theta} = \frac{\sin \theta}{\theta}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

We vermenigvuldigen met een integrerende factor  $g$ :

$$g \frac{dy}{d\theta} + g \frac{y}{\theta} = g \frac{\sin \theta}{\theta}$$

en we bepalen  $g$  zodat het linkerlid de vorm krijgt van de afgeleide van een product:  $(gy)' = gy' + g'y$ :

$$g \underbrace{\frac{dy}{d\theta}}_{y'} + \underbrace{g}_{g'} y = g \frac{\sin \theta}{\theta}$$

Hieruit kan  $g$  bepaald worden door volgende scheidbare differentiaalvergelijking te integreren (met  $g' = \frac{dg}{d\theta}$ ):

$$\frac{dg}{d\theta} = \frac{g}{\theta} \Rightarrow \int \frac{dg}{g} = \int \frac{d\theta}{\theta} \Rightarrow \ln g = \ln \theta \Leftrightarrow g(\theta) = \theta$$

Voor het homogeen deel geldt dus:

$$(y_h(\theta)g(\theta))' = 0 \Rightarrow y_h(\theta)g(\theta) = C \Rightarrow y_h(\theta) = \frac{C}{g(\theta)} = \frac{C}{\theta}$$

We vermenigvuldigen beide leden met deze integrerende factor:

$$\begin{aligned} \theta \frac{dy}{d\theta} + \theta \frac{y}{\theta} &= \theta \frac{\sin \theta}{\theta} \\ \Leftrightarrow \frac{d(y\theta)}{d\theta} &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Integreren van beide leden naar  $\theta$ :

$$\begin{aligned}y\theta &= \int \sin(\theta) d\theta \\&= -\cos \theta + C\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\cos \theta}{\theta} + \frac{C}{\theta}$$

Door substitutie van  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  bepalen we de waarde van  $C$ :

$$1 = -\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + \frac{C}{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

De oplossing is dus:

$$y(\theta) = -\frac{\cos \theta}{\theta} + \frac{\pi}{2\theta}$$

## Reeks $\beta 1$

1. Bepaal de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2}.$$

### Oplossing

Voor  $x > -2$  geldt  $|x+2| = x+2$ , zodat:

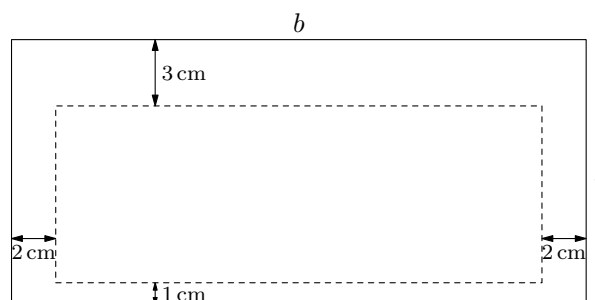
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3) \frac{|x+2|}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3) \frac{x+2}{x+2} \\&= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+3) \frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x+2}} \\&= \lim_{x \rightarrow -2^+} x+3 = 1\end{aligned}$$

2. Een printer moet een poster printen waarvan de totale oppervlakte  $200 \text{ cm}^2$  bedraagt en die 2 cm marge heeft aan de zijkanten, 3 cm aan de bovenkant en 1 cm marge aan de onderkant. Welke dimensies van de poster geven de grootste bedrukte oppervlakte?

*Illustreer de opgave a.d.h.v. een schets.*

### Oplossing

Noemen we de breedte van de poster  $b$  en de lengte  $l$ , dan moet  $lb = 200$  omdat de totale oppervlakte  $200 \text{ cm}^2$  bedraagt.



Door de marges bedraagt de breedte van het bedrukbare deel  $b - 4$  en de lengte van het bedrukbare deel  $l - 4$ . De bedrukbare oppervlakte is bijgevolg:

$$S(b, l) = (b - 4)(l - 4)$$

Uit  $lb = 200$  volgt  $l = \frac{200}{b}$  en substitutie hiervan in  $S(b, l)$  levert:

$$S(b) = (b - 4) \left( \frac{200}{b} - 4 \right) = 216 - 4b - \frac{800}{b}$$

We zoeken  $b \geq 0$  zodat  $S(b)$  maximaal is en bepalen daarvoor de nulpunten van de afgeleide  $S'(b)$ :

$$S'(b) = 0 \iff -4 + \frac{800}{b^2} = 0 \iff b^2 = 200 \iff b = 10\sqrt{2} \vee b = -10\sqrt{2}$$

Aan de hand van de tweede afgeleide controleren we de aard van het extremum. Omdat  $S''(b) = -\frac{1600}{b^3}$  geldt duidelijk  $S''(b) < 0$  als  $b \geq 0$  zodat het een maximum betreft. We bepalen de bijhorende waarde van  $l$ :

$$l = \frac{200}{b} \Rightarrow l = \frac{200}{10\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$$

Antwoord: de totale bedrukbare oppervlakte is maximaal wanneer zowel lengte als breedte  $10\sqrt{2}$  cm bedragen.

3. Los volgende differentiaalvergelijking met beginvoorwaarde op:

$$\theta \frac{dr}{d\theta} = \theta^3 \sec(\theta) \tan(\theta) + 2r, \quad r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.$$

### Oplossing

De differentiaalvergelijking is een eerste orde, lineaire, niet-homogene differentiaalvergelijking met  $r$  als afhankelijke en  $\theta$  als onafhankelijke variabele; we zoeken dus  $r(\theta)$ . We brengen de differentiaalvergelijking eerst in standaardvorm:

$$\frac{dr}{d\theta} - \frac{2}{\theta}r = \theta^2 \sec(\theta) \tan(\theta), \quad r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

We vermenigvuldigen met een integrerende factor  $g$ :

$$g \frac{dr}{d\theta} - g \frac{2}{\theta}r = g\theta^2 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

en we bepalen  $g$  zodat het linkerlid de vorm krijgt van de afgeleide van een product:  $(gr)' = gr' + g'r$ :

$$g \underbrace{\frac{dr}{d\theta}}_{r'} - \underbrace{g \frac{2}{\theta}r}_{g'r} = g\theta^2 \sec(\theta) \tan(\theta)$$

Hieruit kan  $g$  bepaald worden door volgende scheidbare differentiaalvergelijking te integreren (met  $g' = \frac{dg}{d\theta}$ ):

$$\frac{dg}{d\theta} = -g \frac{2}{\theta} \Rightarrow \int \frac{dg}{g} = -2 \int \frac{d\theta}{\theta} \Rightarrow \ln g = \ln(\theta^{-2}) \Leftrightarrow g(\theta) = \theta^{-2}$$

Voor het homogeen deel geldt dus:

$$(r_h(\theta)g(\theta))' = 0 \Rightarrow r_h(\theta)g(\theta) = C \Rightarrow r_h(\theta) = \frac{C}{g(\theta)} = C\theta^2$$

We vermenigvuldigen beide leden met deze integrerende factor:

$$\begin{aligned}\theta^{-2} \frac{dr}{d\theta} - \theta^{-2} \frac{2}{\theta} r &= \theta^{-2} \theta^2 \sec(\theta) \tan(\theta) \\ \Leftrightarrow \frac{d(r\theta^{-2})}{d\theta} &= \sec(\theta) \tan(\theta)\end{aligned}$$

Integreren van beide leden naar  $\theta$ :

$$\begin{aligned}r\theta^{-2} &= \int \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ &= \int \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \quad [\text{substitutie: stel } t = \cos x] \\ &= - \int \frac{1}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{t} + C \\ &= \sec \theta + C \\ \Leftrightarrow r &= \theta^2 \sec \theta + C\theta^2\end{aligned}$$

Door substitutie van  $r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$  bepalen we de waarde van  $C$ :

$$2 = C \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \sec\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2 = (2 + C) \frac{\pi^2}{9} \Leftrightarrow C = \frac{18}{\pi^2} - 2$$

De oplossing is dus:

$$r(\theta) = \left(\frac{18}{\pi^2} - 2\right) \theta^2 + \theta^2 \sec(\theta)$$

## Reeks $\alpha 2$

1. Vind de lengte van de volgende kromme:

$$y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2} \text{ voor } 0 \leq x \leq 3.$$

### Oplossing

De lengte  $L$  van de grafiek van een functie met voorschrift  $y = f(x)$  voor  $a \leq x \leq b$  wordt gegeven door de integraal:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

We bepalen daarvoor eerst de afgeleide van  $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ :

$$f'(x) = \frac{3}{2} \frac{1}{3} (x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = x(x^2 + 2)^{1/2}$$

We berekenen de integraal om de lengte  $L$  te bepalen:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \int_0^3 \sqrt{1 + (x(x^2 + 2)^{1/2})^2} \, dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} \, dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} \, dx \\ &= \int_0^3 \sqrt{(x^2 + 1)^2} \, dx \\ &= \int_0^3 (x^2 + 1) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_0^3 = 9 + 3 - 0 - 0 = \mathbf{12} \end{aligned}$$

2. Voor welke waarden van  $x$  is deze machtreeks absoluut convergent? Wanneer is ze conditioneel convergent? Voor welke waarden van  $x$  is ze divergent?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x - 5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$$

### Oplossing

We bepalen het convergentie-interval met behulp van de verhoudingstest. Een reeks  $\sum u_n$  convergeert absoluut indien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

We bepalen de limiet in het linkerlid voor de gegeven reeks:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(4x - 5)^{2n+3}}{(n+1)^{3/2}} \frac{n^{3/2}}{(4x - 5)^{2n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (4x - 5)^2 \left( \frac{n}{n+1} \right)^{3/2} \right| \\ &= (4x - 5)^2 \underbrace{\left| \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \right)^{3/2} \right|}_{=1} \\ &= (4x - 5)^2 \end{aligned}$$

We bepalen waar de ongelijkheid geldt:

$$(4x - 5)^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < 4x - 5 < 1 \Leftrightarrow 4 < 4x < 6 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{3}{2}$$

De convergentie in de randpunten dient afzonderlijk nagegaan te worden. In  $x = 1$  geldt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^{3/2}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

en dit is een convergente  $p$ -reeks (met  $p = 3/2 > 1$ ). In  $x = \frac{3}{2}$  geldt hetzelfde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^{2n+1}}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

De machtreeks is bijgevolg absoluut convergent op het interval  $[1, \frac{3}{2}]$  en divergent elders.

3. Bereken alle eerste en tweede orde partiële afgeleiden van de functie

$$f(x, y) = xy + y^2 - 2x - 2y + 2$$

en ga na of deze een minimum/maximum/zadelpunt heeft en indien ja, in welk punt.

### Oplossing

We bepalen alle partiële afgeleide van eerste en tweede orde:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y - 2 & f_{xx}(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) &= 2y + x - 2 & f_{yy}(x, y) &= 2 \\ & & f_{xy}(x, y) &= 1 = f_{yx}(x, y) \end{aligned}$$

We bepalen de kritieke punten, dit zijn de punten waar de eerste orde partiële afgeleide gelijk zijn aan 0:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = 0 \\ 2y + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

In het punt  $(-2, 2)$  geldt:

$$f_{xx}(-2, 2)f_{yy}(-2, 2) - (f_{xy}(-2, 2))^2 = -1 < 0$$

en dus heeft  $f$  in  $(-2, 2)$  een zadelpunt.

## Reeks $\beta_2$

1. Vind de lengte van de volgende kromme:

$$\alpha(t) = \left( t^2, \frac{t^3}{3} - t \right) \text{ voor } -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}.$$

### Oplossing

De lengte  $L$  van een parameterkromme  $(f(t), g(t))$  met  $a \leq t \leq b$  wordt gegeven door de integraal:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt$$

We bepalen daarvoor eerst de afgeleiden van  $f(t)$  en  $g(t)$ :

$$f(t) = t^2 \Rightarrow f'(t) = 2t \quad \text{en} \quad g(t) = \frac{t^3}{3} - t \Rightarrow g'(t) = t^2 - 1$$

We berekenen de integraal om de lengte  $L$  te bepalen:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2} \, dt \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + t^4 - 2t^2 + 1} \, dt \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} \, dt \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{(t^2 + 1)^2} \, dt \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t^2 + 1) \, dt = \left[ \frac{t^3}{3} + t \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\ &= \left( \frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \right) - \left( -\frac{3\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Voor welke waarden van  $x$  is deze machtreeks absoluut convergent? Wanneer is ze conditioneel convergent? Voor welke waarden van  $x$  is ze divergent?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

### Oplossing

We bepalen het convergentie-interval met behulp van de verhoudingstest. Een reeks  $\sum u_n$  convergeert absoluut indien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

We bepalen de limiet in het linkerlid voor de gegeven reeks:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} (x-1)^{2n+3}}{2n+3} \frac{2n+1}{(-1)^n (x-1)^{2n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (x-1)^2 \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{3/2} \right| \\ &= (x-1)^2 \underbrace{\left| \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{3/2} \right|}_{=1} \\ &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

We bepalen waar de ongelijkheid geldt:

$$(x-1)^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

De convergentie in de randpunten dient afzonderlijk nagegaan te worden. In  $x = 0$  geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{3n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

Deze reeks voldoet aan de voorwaarden van de test voor alternerende reeksen (Leibniz) met  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ , een positieve, dalende rij die naar 0 convergeert; de reeks is bijgevolg convergent. De reeks is echter niet absoluut convergent omdat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

Toepassen van de limiet vergelijkingstest met  $\frac{1}{n}$  levert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

en dus divergeert  $\sum \frac{1}{2n+1}$  omdat  $\sum \frac{1}{n}$  divergeert (harmonische reeks). In  $x = 2$  geldt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

met hetzelfde convergentiegedrag als in  $x = 0$ . De machtreeks is bijgevolg convergent op het interval  $[0, 2]$ : absoluut convergent op  $]0, 2[$  en conditioneel convergent in  $x = 0$  en  $x = 2$ ; de machtreeks is divergent buiten  $[0, 2]$ .

### 3. Bereken alle eerste en tweede orde partiële afgeleiden van de functie

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

en ga na of deze een minimum/maximum/zadelpunt heeft en indien ja, in welk punt.

#### Oplossing

We bepalen alle partiële afgeleide van eerste en tweede orde:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - 1 & f_{xx}(x, y) &= 2 \\ f_y(x, y) &= 4y & f_{yy}(x, y) &= 4 \\ f_{xy}(x, y) &= 0 = f_{yx}(x, y) \end{aligned}$$

We bepalen de kritieke punten, dit zijn de punten waar de eerste orde partiële afgeleide gelijk zijn aan 0:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

In het punt  $(\frac{1}{2}, 0)$  geldt:

$$f_{xx}(\frac{1}{2}, 0)f_{yy}(\frac{1}{2}, 0) - (f_{xy}(\frac{1}{2}, 0))^2 = 8 > 0 \quad \text{en} \quad f_{xx}(\frac{1}{2}, 0) = 2 > 0$$

en dus heeft  $f$  in  $(\frac{1}{2}, 0)$  een lokaal minimum.