

Bewijzen voor Heaps en Sorteren

Algoritmen en Datastructuren 1

VUB Computerwetenschappen

Academiejaar 2025–2026

1 Heap Eigenschappen

Eigenschap 1.1: Hoogte van een Heap.

Een heap met n elementen heeft hoogte:

$$h = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

(aantal takken van langste pad tot een blad)

Bewijs. We gebruiken enkele fundamentele eigenschappen:

- **Formule meetkundige rij:** $\sum_{i=0}^h a^i = \frac{a^{h+1} - 1}{a - 1}$
- Op niveau $i \leq h$: maximaal 2^i elementen
- Op niveau h :
 - $\min(h) = 1$
 - $\max(h) = 2^h$

Het totaal aantal knopen n voldoet aan:

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^i + 1 \leq n \leq \sum_{i=0}^h 2^i$$

(minimum: vorig niveau vol + 1 knoop; maximum: huidig niveau vol)

Uitwerking met meetkundige reeks:

$$\iff \frac{2^{h-1+1} - 1}{2 - 1} + 1 \leq n \leq \frac{2^{h+1} - 1}{2 - 1} \quad (\text{formule meetkundige rij})$$

$$\iff 2^h - 1 + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

$$\iff 2^h \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

$$\iff 2^h \leq n < 2^{h+1} \quad (\text{bovengrens groter maken})$$

$$\iff \log_2(2^h) \leq \log_2(n) < \log_2(2^{h+1}) \quad (\text{van alles } \log_2 \text{ nemen})$$

$$\iff h \leq \log_2 n < h + 1 \quad (\text{uitwerken van log})$$

$$\iff h = \lfloor \log_2 n \rfloor \quad (\text{haakjes staan voor afgerond naar beneden})$$

Eigenschap 1.2: Aantal Bladeren in een Heap.

Een heap met n elementen heeft $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ bladeren.

Bewijs uit het ongerijmde. Stel: #bladeren heap $< \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Neem het laatste element dat **geen blad** is:

$$\text{index element } i > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (\text{definitie heap})$$

$\Rightarrow$ blad heeft minstens 1 child op index $2i$:

$$2i > 2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \iff 2i > n$$

$\Rightarrow$ **onmogelijk**, want het totaal aantal elementen van de heap is n , dus je kan nooit een child hebben op positie $> n$.

$\Rightarrow$ **contradictie**

Stel: #bladeren heap $> \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Neem het laatste element dat een blad is: index blad = n

Dan is parent blad $\frac{n}{2}$, dit zou ook een blad moeten zijn want:

$$\text{\#bladeren heap} > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Dit **kan niet**, want een blad kan geen kinderen hebben!

$\Rightarrow$ **contradictie**

Stelling is bewezen door insluiting.

Eigenschap 1.3: Elementen op Hoogte h .

Een heap van n elementen heeft op hoogte h **maximaal** $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$ elementen.

Bewijs per inductie. Basisgevallen:

- Op hoogte 0 (laag met alle leaves):

$$\Rightarrow \text{\#bladeren} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

- Op hoogte 1 (laag met parents van de leaves):

$$\Rightarrow \text{\#elementen} = \left\lceil \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2^2} \right\rceil$$

- Op hoogte 2:

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{n}{4} \cdot \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2^3} \right\rceil$$

Inductiestap:

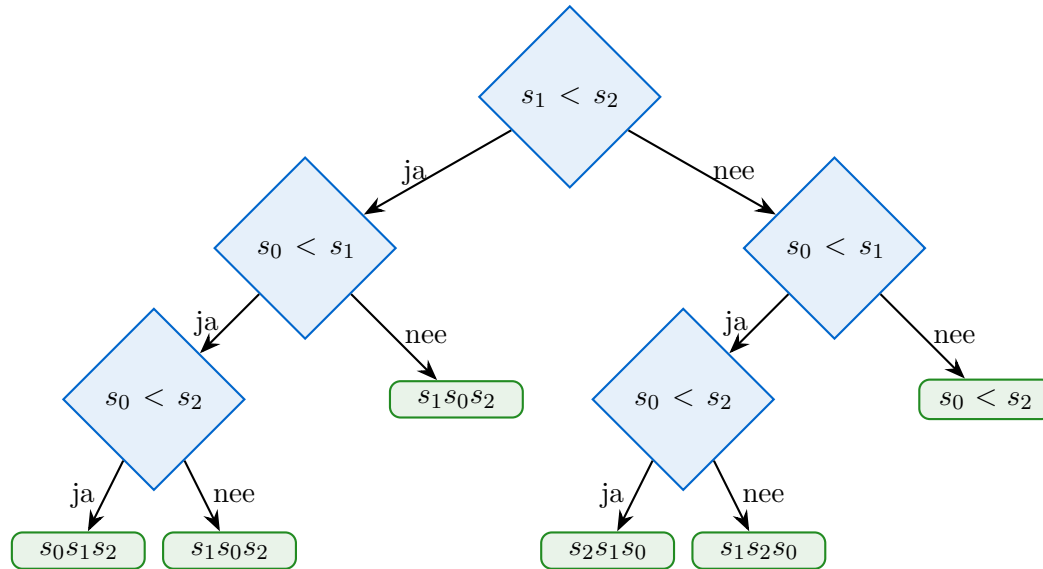
Op hoogte h :

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$$

2 Ondergrens voor Sorteren

Stelling 2.1: Ondergrens Vergelijksgebaseerd Sorteren

Geen enkel algoritme dat gebaseerd is op vergelijkingen alleen kan sneller dan $n \cdot \log(n)$.



Observatie

Voor ieder algoritme kan je een **beslissingsboom** tekenen die alle mogelijke executies visualiseert.

Iedere uitvoering van het algoritme produceert één van de $n!$ mogelijke **permutaties** van de inputvector.

Bewijs.

- Er zijn $n!$ permutaties
- Dus: de beslissingsboom heeft $n!$ bladeren (leaves)
- Dus: de boom heeft minstens $n!$ knopen
- Dus: hoogte $h > \log(n!)$
- Dus: $h > n \cdot \log(n)$, want $\log(n!) \in \Omega(n \cdot \log(n))$

**h is de hoogte van de beslissingsboom.
Dus minstens $\Omega(n \cdot \log(n))$ vergelijkingen!**



Lemma 2.1: $\log(n!) \in \Omega(n \cdot \log n)$

lets prove ts..

Bewijs. We schrijven $\log(n!)$ uit:

$$\log(n!) = \log(1) + \log(2) + \dots + \log\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + \log(n)$$

$$\geq \log\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + \log(n) \quad (\text{eerste helft weglaten})$$

$$\geq \log\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + \log\left(\frac{n}{2}\right) \quad (\text{allemaal vervangen door minimum})$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right) \quad \left(\frac{n}{2} \text{ termen}\right)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot (\log(n) - 1)$$

$$= \frac{n}{2} \cdot \log(n) - \frac{n}{2}$$

$$> \frac{n}{2} \cdot \log(n) - \frac{n}{6} \cdot \log(n) \quad \text{voor } n > 8 = 2^3 (= n_0)$$

$$= \frac{n}{3} \cdot \log(n)$$

Dus: $\log(n!) > \frac{1}{3} \cdot n \cdot \log(n)$ voor $n > 8$
--

Dit betekent dat $\log(n!) \in \Omega(n \cdot \log n)$ met constante $c = \frac{1}{3}$ en $n_0 = 8$. ■